Bogusław Bożek, Wiesław Solak, Zbigniew Szydełko
AGH Akademia Górniczo–Hutnicza
Wydział Matematyki Stosowanej
E-mail: `bozek@agh.edu.pl`

Zastosowanie korektur brzegowych do szacowania sum szeregów

Jak obliczyć bądź oszacować sumę szeregu liczbowego o wyrazach a_j? Jeśli szereg jest szybko zbieżny, to dobrym oszacowaniem będzie n-ta suma częściowa już przy małej wartości $n \in \mathbb{N}$. Jednak często szereg jest wolno zbieżny. Tak jest przykładowo w przypadku szeregu o wyrazach $a_j = j^{-t}\big(t \in (1, +\infty)\big)$ definiującego funkcję zeta Riemanna. W takim przypadku, aby dostać oszacowanie sumy szeregu z rozsądnym błędem, potrzebujemy nierealistycznie wielkiego n. W wielu przypadkach, j-ty wyraz szeregu może być obliczony jako wartość pewnej gładkiej funkcji f dla argumentu j np. $a_j = f(j + 1/2)$. W takiej sytuacji, o ile znana jest wartość całki z funkcji f od $j + 1$ do nieskończoności, możemy skonstruować dobre oszacowanie sumy szeregu s.

Rozważymy pewne korektury brzegowe rzędu szóstego i pokażemy ich zastosowanie do obliczania przybliżonej wartości sum pewnych szeregów. Jednym z wyników jest następujące:

Twierdzenie. *Przyjmijmy, że funkcja f spełnia założenia:*
— *f jest dodatnia i malejąca, lub ujemna i rosnąca na $[1, +\infty)$,*
— *$\int_1^\infty f(x)\,dx$ jest zbieżna,*
— *$f \in C^6\big([1, \infty)\big)$, $f^{(6)}$ jest stałego znaku na $\big[1, \infty\big)$.*
Definiujemy $a_j := f(j + 1/2)$, $j \in \mathbb{N}$, $s := \sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Przy tych założeniach, jeśli $f^{(6)} > 0$, to

$$\sum_{j=0}^{m-1} a_j + \int_m^\infty f(x)\,dx - P_m\Big(\sqrt{\tfrac{7}{230}}, f\Big) < s < \sum_{j=0}^{m-1} a_j + \int_m^\infty f(x)\,dx - P_m\Big(-\sqrt{\tfrac{7}{230}}, f\Big)$$

dla $m > 2$, gdzie

$$P_m(t, f) := \frac{115}{84} t\big(2f(m + \tfrac{1}{2}t) - 3f(m + \tfrac{3}{2}t) + f(m + \tfrac{5}{2}t)\big).$$

Jeśli $f^{(6)} < 0$, to kierunek nierówności jest przeciwny.

Przedstawione wyniki są kontynuacją prac [3], [2], [1].

Literatura

[1] B. Bożek, W. Solak, Z. Szydełko, *On some quadrature rules with Gregory end corrections*, Opuscula Mathematica 29 (2009), 117–129.
[2] W. Solak, *A remark on power series estimation via boundary corrections with parameter*, Opuscula Mathematica 19 (1999), 75–80.
[3] W. Solak, Z. Szydełko, *Quadrature rules with Gregory–Laplace end corrections*, Journal of Computational and Applied Mathematics 36 (1991), 251–253.