dr inż. Wiesław Grygierzec
Uniwersytet Rolniczy w Krakowie
Katedra Statystyki Matematycznej

O pewnym problemie sterowania dla stochastycznego 2-D równania Naviera-Stokesa

Przedmiotem referatu jest zagadnienie zminimalizowania turbulencji dla stochastycznej wersji równania Naviera-Stokesa sterowanego poprzez oddziaływania zewnętrzne. Równanie to opisuje zachowanie pola prędkości nieściśliwej cieczy w zadanym obszarze fizycznym i przy zadanej konfiguracji początkowej. Zakładając, że możemy oddziaływać na ciecz pewnymi siłami zewnętrznymi, problem polega na znalezieniu takiego oddziaływania, przy którym turbulencja w trakcie przepływu jest minimalna. Zagadnienie to ma fundamentalne znaczenie dla praktycznych zastosowań, a niezależnie jest bardzo interesujące z czysto matematycznego punktu widzenia.

Rozważane przez nas równanie jest postaci

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \nu\Delta u(t,x) + (u\cdot\nabla)u + \nabla p + f + \dot{W}_Q \text{ w } D \\ \nabla\cdot u = 0 \text{ w } D,\ u = 0 \text{ na brzegu } \partial D \\ u|_{t=0} = u_0 \text{ w } D, \end{cases} \tag{NS}$$

gdzie $D\subset\mathbb{R}^2$ — obszar spójny o gładkim brzegu, $u=(u_1,u_2)$ — wektor prędkości, p — ciśnienie, W_Q — proces Wienera o wartościach w $L^2(D)$ i kowariancji Q, oddziaływania zewnętrzne f pełnią rolę sterowania.

Problem sterowania optymalnego

$$\begin{cases} \text{Znaleźć sterowanie } f \text{ minimalizujące funkcjonał} \\ J(f) = \mathbb{E}\{\int_0^T\int_D |f(t,x)|^2\,dx\,dt + \int_0^T\int_D |\nabla\times u_f(t,x)|^2\,dx\,dt\} \end{cases} \tag{P}$$

gdzie u_f jest rozwiązaniem (NS) przy zadanym f, natomiast $\nabla\times u_f$ jest rotacją u_f. Parę (f^*,u_{f^*}) spełniającą problem (P) nazwiemy parą optymalną.

Celem referatu jest twierdzenie o istnieniu pary optymalnej dla (P) oraz przedstawienie warunku koniecznego pierwszego rzędu na optymalność, związanego ze zróżniczkowaniem w sensie Gâteaux funkcjonału $J(f)$. Mamy następujące twierdzenie:

Twierdzenie. *Niech* $(\overline{f},\overline{u})$ *będzie parą optymalną dla problemu* (P)*, wówczas ma miejsce tożsamość*

$$\overline{f} + \tilde{w}(\nabla\times(\nabla\overline{u})) = 0 \ p.n.$$

gdzie $\tilde{w}(\nabla\times(\nabla\times\overline{u}))$ *jest stanem sprzężonym, tzn. jest rozwiązaniem zlinearyzowanego problemu sprzężonego.*

W przypadku deterministycznym powyższy problem był rozważany przez Abergel, Temam, w naszym referacie rozważamy przypadek stochastyczny.

Literatura

[1] F. Abergel, R. Temam, *On Some Control Problems in Fluid Mechanics*, Theoret. Comput. Fluid Dynamics 1 (1990), 303–325.
[2] J. L. Menaldi, S. S. Sritharan, *Stochastic 2-D Navier-Stokes equation*, Appl. Math. Optim. 46 (2002), 31–53.