dr Jan Koroński
Politechnika Krakowska
Wydział Fizyki, Matematyki i Informatyki, Instytut Matematyki

Metoda wyznaczania nieznanego współczynnika zależnego od czasu dla równania parabolicznego w przestrzeni nieskończeniewymiarowej

Zajmiemy się kwestią określenia dyfuzyjności termicznej ośrodka nieskończeniewymiarowego, która zmienia się z czasem. Fizyczny przykład takiego problemu (w przypadku trójwymiarowym) realizuje się dla przewodnictwa ciepła w materiale, który ulega destrukcji, np. ulega radioaktywnemu wyeksploatowaniu. Termiczna przewodność (współczynnik w równaniu parabolicznym) zmienia się wraz ze stopniem destrukcji materiału, która może zależeć od czasu. Nieskończeniewymiarowe równanie paraboliczne [1], [2], [3] ze współczynnikiem zależnym od czasu może być zapisane w obszarze

$$D = \{(x,t) : x_i \in (-\infty,\infty),\ i = 1,2,\ldots,\ t((0,T)\} = \mathbb{R}^\infty \times (0,T)$$

w postaci

$$\Big(a(t)\sum_{i=1}^{\infty} D_{x_i}^2 - D_t\Big)u(x,t) = 0, \quad x = (x_1, x_2, \ldots) \in \mathbb{R}^\infty,$$

gdzie $a(t) > 0$ oznacza nieznany współczynnik termicznej dyfuzyjności zależny od czasu.

Powyższe równanie może być zredukowane do równania o stałych współczynnikach poprzez następujące przekształcenie:

$$\theta(t) = \int_0^t a(y)\,dy, \quad 0 \le t \le T.$$

Ponieważ

$$\theta'(t) = a(t) > 0, \quad 0 \le t \le T,$$

więc istnieje jedyna funkcja $\varphi(\theta)$ taka, że

$$\begin{gathered}\theta(\varphi(\tau)) = \tau, \quad 0 \le \tau \le \theta(T),\\ \varphi(\theta(t)) = t, \quad 0 \le t \le \theta(T),\\ \varphi'(\tau) = \theta'(\varphi(\tau))^{-1} = (a(\varphi(\tau)))^{-1}, \quad 0 \le \tau \le \theta(T).\end{gathered}$$

Niech

$$U(x,\eta) = u(x,\varphi(\eta)).$$

Wtedy

$$U_\eta(x,\eta) = u_t(x,\varphi(\eta))\varphi'(\eta) = u_t(x,\varphi(\eta))(a(\varphi(\eta)))^{-1}$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} D_{x_i}^2 u(x,\varphi(\eta)) = \sum_{i=1}^{\infty} D_{x_i}^2 U(x,\eta).$$

W konsekwencji otrzymana reprezentacja dla $u(x,t)$, po uwzględnieniu $\eta = \theta(t)$, daje reprezentację dla $U(x,\eta)$.

Zatem zagadnienie początkowe

$$u_t = a(t)\sum_{i=1}^{\infty} D_{x_i}^2 u, \quad -\infty < x_i < \infty, \quad 0 < t, \quad u(x,0) = \prod_{i=1}^{\infty} h_i(x_i),$$
$$-\infty < x_i < \infty, \quad i = 1,2,\ldots$$

redukuje się do problemu

$$U_\eta = \sum_{i=1}^{\infty} D_{x_i}^2 U, \quad -\infty < x_i < \infty, \quad 0 < \eta, \quad U(x,0) = \prod_{i=1}^{\infty} h_i(x_i),$$
$$-\infty < x_i < \infty, \quad i = 1,2,\ldots$$

z ograniczonym rozwiązaniem [1]

$$U(x,\eta) = \int_{\mathbb{R}^\infty} \prod_{i=1}^{\infty} h_i(\xi_i) U_i(x_i, t; \xi_i, 0)\, d\xi_i, \quad x = (x_1, x_2, \ldots) \in \mathbb{R}^\infty, \quad t \in (0,T).$$

Podstawiając $\eta = \theta(t)$, otrzymujemy

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^\infty} \prod_{i=1}^{\infty} h_i(\xi_i) U_i(x_i, \theta(t); \xi_i, 0)\, d\xi_i$$
$$= \left(4\pi \int_0^t a(y)\, dy\right)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^\infty} \prod_{i=1}^{\infty} h_i(\xi_i) \exp\left\{-\frac{(x_i - \xi_i)^2}{4\int_0^t a(y)\, dy}\right\} d\xi_i.$$

Aby wyznaczyć nieznany współczynnik $a(t)$, trzeba dysponować dodatkowymi danymi zagadnienia. Wymaga to dodatkowych pomiarów temperatury w dowolnym, ale ustalonym punkcie x_0 wewnątrz ośrodka. Skutkuje to przyjęciem dodatkowego tzw. warunku kontrolnego (warunku sterowania). W konsekwencji otrzymujemy równanie całkowe na nieznany współczynnik $a(t)$, które należy rozwiązać. (W przypadku zagadnienia początkowo-brzegowego warunek kontrolny wymaga znajomości strumienia przy brzegu — zgodnie z prawem Fouriera).

Bibliografia

[1] J. Koroński, *Parabolic problem in the space* $\mathbb{R}^\infty$, Commentationes Mathematicae XLIV (2004), 301—306.

[2] J. Koroński, *Nonhomogeneous parabolic problem in the space* $\mathbb{R}^\infty$, Fasciculi Mathematici 38 (2007), 41–45.

[3] J. Koroński, *Problem odwrotny dla równania parabolicznego w przestrzeni nieskończenie wymiarowej*, Czasopismo Techniczne, 1-NP/2009, Zeszyt 8, str. 77–84.