Gabriel Pietrzkowski
Instytut Matematyczny PAN

Rozwiązanie ogólnego układu Lie-Scheffersa na grupie $\mathfrak{sl}(2)$ oraz równania Riccatiego

Niech M będzie skończeniewymiarową rozmaitością różniczkową. Niech $X_a, X_b, X_c \in \Gamma(\mathrm{M})$ będą gładkimi polami wektorowymi na M generującymi algebrę Lie typu $\mathfrak{a}_1 \simeq \mathfrak{sl}(2)$ w ten sposób, że

$$[X_a, X_b] = 2X_a, \quad [X_a, X_c] = -X_b, \quad [X_b, X_c] = 2X_c, \tag{1}$$

gdzie $[\cdot,\cdot]$ jest nawiasem Lie pól wektorowych. Rozważmy równanie

$$\dot{x}(t) = u_a(t)X_a + u_b(t)X_b + u_c(t)X_c, \qquad x(0) = x_0, \tag{2}$$

dla ustalonego mierzalnego sterowania $u = (u_a, u_b, u_c) : [0,T] \to U \subset \mathbb{R}^3$, gdzie U jest pewnym dopuszczalnym zbiorem sterowań. Chcemy podać (lokalne) rozwiązanie tego układu w możliwie prostej postaci.

Wprowadźmy kilka definicji. Niech $\mathrm{A} = \{a, b, c\}$ będzie zbiorem „liter”. Niech A_n^* będzie zbiorem n-literowych słów, tj.

$$\mathrm{A}_n^* = \{a_1 a_2 \cdots a_n \mid \ a_1, \ldots, a_n \in \mathrm{A}\},$$

oraz $\mathrm{A}^* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \mathrm{A}_n^*$. W szczególności $\mathrm{A}_0^* = \{1\}$ składa się z jednego słowa — pustego.

Rozważmy $\mathbb{R}$-algebrę $\mathbb{R}\langle\langle \mathrm{A}\rangle\rangle$ szeregów od nieprzemiennych zmiennych A. Przez $ш : \mathbb{R}\langle\langle \mathrm{A}\rangle\rangle \otimes \mathbb{R}\langle\langle \mathrm{A}\rangle\rangle \to \mathbb{R}\langle\langle \mathrm{A}\rangle\rangle$ oznaczamy tasowanie zdefiniowane rekursywnie dla słów tak, że $1 ш w = w ш 1 = w$ dla każdego $w \in \mathrm{A}^*$ oraz $(w_1 a_1) ш (w_2 a_2) = (w_1 ш (w_2 a_2))a_1 + ((w_1 a_1) ш w_2)a_2$ dla każdego $a_1, a_2 \in \mathrm{A}$ i $w_1, w_2 \in \mathrm{A}^*$. Niech $\exp_ш : \mathbb{R}\langle\langle \mathrm{A}\rangle\rangle_0 \to \mathbb{R}\langle\langle \mathrm{A}\rangle\rangle$ będzie dane przez

$$\exp_ш(P) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P^{шk}}{k!},$$

gdzie indeks „0” w $\mathbb{R}\langle\langle \mathrm{A}\rangle\rangle_0$ oznacza, że rozważamy jedynie P o zerowym wyrazie stałym.

Dla ustalonych mierzalnych sterowań $u_a, u_b, u_c : [0,t] \to \mathbb{R}$ definiujemy $\Upsilon^t : \mathbb{R}\langle\langle \mathrm{A}\rangle\rangle \to \mathbb{R}$,

$$\mathrm{A}^* \ni w = a_1 \cdots a_n \mapsto \Upsilon^t(w) := \int_0^t u_{a_n}(t_n) \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} u_{a_1}(t_1)\, dt_1 \ldots dt_{n-1} dt_n.$$

Można sprawdzić, że $\Upsilon^t(v ш w) = \Upsilon^t(v)\Upsilon^t(w)$ — jest to algebraiczny zapis całkowania przez części.

Wreszcie przez $\exp(tX) : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ oznaczamy potok pola $X \in \Gamma(\mathrm{M})$ po czasie $t \geq 0$.

Twierdzenie 1. *Niech* $X_a, X_b, X_c \in \Gamma(\mathrm{M})$ *spełniają* (1)*. Wówczas* (*lokalnie*) *rozwiązanie* $x : [0,T] \to \mathrm{M}$ *równania* (2) *można przedstawić jako*

$$x(t) = \exp\left(\Xi_c(t) X_c\right) \exp\left(\Xi_b(t) X_b\right) \exp\left(\Xi_a(t) X_a\right)(x_0),$$

gdzie $\Xi_a, \Xi_b, \Xi_c : [0,T] \to \mathbb{R}$ *są równe* $\Xi_d(t) := \Upsilon^t(S^d)$ $(d = a, b, c)$*, oraz* $S^d \in \mathbb{R}\langle\langle \mathrm{A} \rangle\rangle$ *są dane przez*

$$S^a = a\ \exp_{ш}(2S_{\mathfrak{a}_1}), \quad S^b = S_{\mathfrak{a}_1}, \quad S^c = \exp_{ш}(2S_{\mathfrak{a}_1})\, c,$$

gdzie $S_{\mathfrak{a}_1} \in \mathbb{R}\langle\langle \mathrm{A} \rangle\rangle$ *jest jednoznacznym rozwiązaniem algebraicznego równania*

$$S_{\mathfrak{a}_1} = b - a\ \exp_{ш}(2S_{\mathfrak{a}_1})\, c.$$

Twierdzenie 2. *Dla ustalonych mierzalnych* $u_a, u_b, u_c : [0,T] \to \mathbb{R}$*, funkcja* $y : [0,T] \to \mathbb{R}$*,*

$$y(t) = \Upsilon^t(a\ \exp_{ш}(2S_{\mathfrak{a}_1})) + \frac{y_0 \cdot e^{2\Upsilon^t(S_{\mathfrak{a}_1})}}{1 + y_0 \cdot \int_0^t u_c(t_1) \cdot e^{2\Upsilon^{t_1}(S_{\mathfrak{a}_1})}\, dt_1},$$

jest (*lokalnie*) *rozwiązaniem równania Riccatiego*

$$\dot{y}(t) = u_a(t) + 2u_b(t) \cdot y(t) - u_c(t) \cdot y^2(t), \qquad y(0) = y_0.$$