dr inż. Jerzy Respondek
Politechnika Śląska
Instytut Informatyki

Efektywny algorytm odwracania konfluentnych macierzy Vandermonde'a

A. Wprowadzenie

Każdą macierz Vandermonde'a można skojarzyć z odpowiadającym wielomianem $p(s) = (s - \lambda_1)^{n_1} \cdots (s - \lambda_r)^{n_r}$. Klasyczna macierz Vandermonde'a odpowiada przypadkowi, gdy wszystkie pierwiastki $p(s)$ są pojedyncze. Gdy wielomian $p(s)$ posiada pierwiastki wielokrotne, odpowiada mu tzw. konfluentna macierz Vandermonde'a. W jej kolumnach oprócz kolejnych potęg różnych pierwiastków znajdują się pochodne tychże kolumn przemnożone przez odpowiedni współczynnik. Formalną definicję podaje [3, 5].

B. Innowacja artykułu

Celem artykułu jest przedstawienie efektywnego algorytmu odwracania konfluentnych macierzy Vandermonde'a. W literaturze podano metody odwracania tychże macierzy [3], jednak wymagają one wykonania szeregu obliczeń symbolicznych i dlatego nie są gotowe do implementacji numerycznej.

Główną innowacją niniejszego artykułu jest podanie algorytmu numerycznego rozwiązującego tytułowy problem. Wprowadzony algorytm jest możliwy do implementacji w dowolnym języku programowania ogólnego przeznaczenia; jedynym wymogiem stawianym docelowemu kompilatorowi jest obsługa typów zmiennoprzecinkowych oraz podstawowych działań arytmetycznych tj. $+$, $-$, $*$, $/$. Ponadto podano przykładową implementację w Visual C++. Algorytm stanowi podsumowanie prac autora.

C. Złożoność obliczeniowa skonstruowanego algorytmu

W artykule udowodniono, że złożoność obliczeniowa podanego algorytmu w ujęciu asymptotycznym wynosi $O(N^2)$, niezależnie od krotności pierwiastków $n_1, \ldots, n_r$ wielomianu charakterystycznego $p(s)$. Dlatego złożoności: pesymistyczna, średnia i optymistyczna wprowadzonego algorytmu są równe $O(N^2)$.

D. Złożoność pamięciowa skonstruowanego algorytmu

Przedstawiona implementacja nie wymaga przydzielania dodatkowych struktur danych poza szukaną macierzą odwrotną, gdyż w toku obliczeń algorytm wykorzystuje tymczasowo nieużywane pola w sukcesywnie wyznaczanej macierzy odwrotnej.

E. Znaczenie konfluentnych macierzy Vandermonde'a oraz ich odwrotności

Odwrotności tytułowych macierzy znajdują zastosowanie w następujących problemach:

- Kodowanie oraz dekodowanie informacji w kodzie Hermitiana [4],

- interpolacja Hermitiana, dopuszczająca występowanie wielokrotnych węzłów,
- optymalizacja układów dynamicznych [2],
- macierz podobieństwa Jordana T dla liniowego równania różniczkowego przekształconego do postaci Frobeniusa ma postać konfluentnej macierzy Vandermonde'a; dlatego znajomość odwrotności T^{-1} pozwala na:
  — rozwiązanie dowolnego (!) liniowego równania różniczkowego o stałych współczynnikach,
  — obliczanie eksponenty (i dowolnej funkcji) macierzy Frobeniusa,
  — analizę zbiorów osiągalnych dla układów dynamicznych dowolnego, n-go rzędu,
  — inne.

Literatura

[1] H. Górecki, *Optymalizacja i sterowanie systemów dynamicznych*, AGH, Kraków 2006.

[2] H. Górecki, *On switching instants in minimum-time control problem. One-dimensional case n-tuple eigenvalue*, Bull. de L'Acad. Pol. Des. Sci. 16 (1968) 23–30.

[3] S. Hou, W. Pang, *Inversion of confluent Vandermonde matrices*, Comput. Math. Appl. 43 (2002), 1539–1547.

[4] K. Lee, M. E. O'Sullivan, *Algebraic soft-decision decoding of Hermitian codes*, IEEE Trans. Inform. Theory 56 (2010), 2587–2600.

[5] J. S. Respondek, *On the confluent Vandermonde matrix calculation algorithm*, Appl. Math. Lett. 24 (2011), 103–106.

[6] J. S. Respondek, *Comments on "Inversion of a Generalized Vandermonde Matrix" by M. E. A. El-Mikkawy*, 80 (2003), 759–765, International Journal of Computer Mathematics, to appear.

[7] J. S. Respondek, *Numerical Recipes for the High Efficient Inverse of the Confluent Vandermonde Matrices*, Applied Mathematics and Computation, to appear.