*mgr Przemysław Rola*
*Uniwersytet Jagielloński*

# Warunki równoważne dla braku arbitrażu

Jeśli rozważymy standardowy model rynku finansowego z czasem dyskretnym i skończonym horyzontem czasowym, wtedy na mocy twierdzenia Dalanga-Mortona-Willingera otrzymujemy warunki równoważne dla braku arbitrażu. Podczas komunikatu omówione zostaną pewne modyfikacje tych warunków.

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną wyposażoną w filtrację $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0}^T$ taką, że $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$. Niech $S = (S_t)_{t=0}^T$ będzie $d$-wymiarowym procesem adaptowalnym względem filtracji $\mathbb{F}$. Zdefiniujmy

$$R_T := \{\xi : \xi = H \cdot S_T, H \in \mathcal{P}\},$$

gdzie $\mathcal{P}$ jest zbiorem wszystkich $d$-wymiarowych procesów przewidywalnych (tj. $H_t$ jest $\mathcal{F}_{t-1}$-mierzalny) oraz

$$H \cdot S_T := \sum_{t=1}^{T} H_t \Delta S_t, \qquad \Delta S_t := S_t - S_{t-1}.$$

Bardzo często $H$ nazywamy strategią finansową, natomiast $H \cdot S$ procesem wartości portfela. Połóżmy $A_T := R_T - \mathcal{L}_+$, gdzie $\mathcal{L}_+ := \{\lambda I_A : \lambda > 0, A \in \mathcal{F}\}$ oraz niech $\overline{A}_T$ oznacza domknięcie zbioru $A_T$ w topologii generowanej przez zbieżność według prawdopodobieństwa.

Podczas komunikatu zostanie przedstawiony dowód następującego twierdzenia.

**Twierdzenie.** *Załóżmy, że $A_T$ jest zbiorem wypukłym. Wtedy następujące warunki są równoważne:*
(a) $A_T \cap \mathcal{L}_+ = \{0\}$;
(b) $A_T \cap \mathcal{L}_+ = \{0\}$ *oraz* $A_T = \overline{A}_T$;
(c) $\overline{A}_T \cap \mathcal{L}_+ = \{0\}$;
(d) *istnieje miara probabilistyczna* $\tilde{P} \sim P$ *taka, że* $d\tilde{P}/dP \in L^\infty$ *i* $S$ *jest* $\tilde{P}$*-martyngałem.*

*Uwaga.* Jak zobaczymy w przykładzie, te zmodyfikowane warunki w ogólności nie są równoważne brakowi arbitrażu. Niezbędne jest założenie wypukłości. Jeśli $A_T$ jest zbiorem wypukłym, wtedy warunki z powyższego twierdzenia są równoważne na mocy warunku (d) innym warunkom z twierdzenia DMW (patrz [1,2]). W szczególności warunki te są równoważne następującym:
(e) $(R_T - L^0_+) \cap L^0_+ = \{0\}$;
(f) $R_T \cap L^+_0 = \{0\}$;
gdzie $L^0_+$ jest zbiorem nieujemnych $d$-wymiarowych wektorów losowych ($\mathcal{F}$-mierzalnych). Zbiór $R_T - L^0_+$ można interpretować jako zbiór instrumentów finansowych. Dwa powyższe warunki są zazwyczaj nazywane warunkami braku arbitrażu (no arbitrage conditions).

**Literatura**

[1] Yu. M. Kabanov, M. Safarian, *Markets with Transaction Costs. Mathematical Theory*, Springer, Berlin-Heidelberg, 2009.
[2] Yu. M. Kabanov, C. Stricker, *A teacher's note on no arbitrage criteria*, Séminaire de Probabilités XXXV, Lecture Notes Math. 1755, Springer, Berlin, 2001, 149–152.
[3] Yu. M. Kabanov, C. Stricker, *The Dalang-Morton-Willinger theorem under delayed and restricted information*, Séminaire de Probabilités XXXIX, Memoriam Paul-André Meyer, Lecture Notes Math. 1874, Springer, Berlin, 2006, 209–213.