

dr Dariusz Zawisza
 Uniwersytet Jagielloński
 Instytut Matematyki

Nowe spojrzenie na ryzyko modelu w zarządzaniu aktywami i zobowiązaniami

Zwykle badając problemy optymalizacyjne związane z inwestycjami finansowymi uwzględniano wyłącznie ryzyko wynikające z postaci konkretnego modelu probabilistycznego. Pozostaje jednakże niepewność związana z parametrami modelu, których nie można wyznaczyć w sposób jednoznaczny. W ostatnim dziesięcioleciu pojawiały się prace, które rozwiązują wspomniane zagadnienie stosując metodę minimaxową. Metoda ta polega na wyznaczeniu rodziny możliwych miar probabilistycznych \mathcal{Q} (względnie zbioru możliwych parametrów modelu), wyznaczających zakres błędu popełnianego przy konstrukcji modelu i zastosowaniu kryterium najgorszego możliwego scenariusza. Jeśli optymalny portfel inwestycyjny wybierany jest na podstawie oczekiwanej użyteczności U końcowej wartości portfela X , to kryterium to oznacza, że portfel inwestycyjny wybierany jest na podstawie maksymalizacji funkcjonału

$$X \rightarrow \inf_{Q \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}^Q(U(X)),$$

gdzie \mathcal{Q} jest odpowiednią rodziną miar probabilistycznych. Strategie inwestycyjne wyznaczone w ten sposób są jednak bardzo konserwatywne, tzn. koncentrują niemal cały kapitał inwestora na instrumentach bez ryzyka. Sytuację tę próbowano poprawić wprowadzając funkcję kary $H(Q|P)$ i funkcjonał typu

$$X \rightarrow \inf_{Q \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}^Q(U(X) - H(Q|P)).$$

Funkcja kary ma mierzyć „odległość” między miarą Q i P i typowym przykładem jest względna entropia miar. Niestety w takim przypadku problemy dynamiczne w czasie ciągłym dają się wypisać w postaci jawnej tylko dla użyteczności logarytmicznej.

W referacie przedstawiony zostanie pomysł zaczerpnięty między innymi z prac [1] i [2], który umożliwia wypisanie rozwiązania w postaci jawnej dla wybranych problemów. Pomysł polega na odpowiedniej konstrukcji funkcji kary, o której bardzo ogólnie można powiedzieć, że jest proporcjonalna do użyteczności portfela. Metoda ta zastosowana zostanie do rozwiązania problemu zarządzania aktywami i zobowiązaniami. Optymalna strategia inwestycyjna zostanie wybrana na podstawie oczekiwanej użyteczności końcowej wartości procesu nadwyżki finansowej (stanowiącego różnicę pomiędzy procesem wartości portfela i procesem zobowiązań finansowych). Rozważana funkcja użyteczności to funkcja postaci $U(x) = 1 - e^{-\gamma x}$. W pierwszej kolejności podany problem inwestycyjny zostanie rozwiązany przy założeniu, że wszystkie procesy generowane są przez proces Wienera. Następnie zaproponowana metoda kary zostanie zastosowana do procesów uwzględniających proces Wienera oraz procesy skokowe (na przykładzie złożonego procesu Poissona). Problemy rozwiązywane są w oparciu o teorię stochastycznych gier różniczkowych i równań Isaaca.

Literatura

- [1] P. Maenhout, *Robust portfolio rules and detection-error probabilities for a mean-reverting risk premium*, J. Econom. Theory 128 (2006), 136–163.
- [2] R. Uppal, T. Wang, *Model misspecification and underdiversification*, Journal of Finance 58 (2003), 2465–2486.