

Bronisław Jakubczyk
Instytut Matematyczny PAN, Warszawa

Misje kosmiczne, geometria i sterowanie

W pierwszej połowie XX wieku zaproponowano matematyczne podstawy lotów pozaziemskich sterowanych pojazdów kosmicznych. Podstawą było równanie Keplera uzupełnione siłą sterującą $F(u) = u_1 F_1 + u_2 F_2 + u_3 F_3$,

$$\ddot{x} = -\mu|x|^{-3}x + F(u), \quad (\text{K})$$

gdzie $u = (u_1, u_2, u_3)$ są współrzędnymi sterowania. Równanie to opisuje ruch małego ciała wokół ciała o dużej masie, np. planety wokół Słońca lub statku kosmicznego wokół Ziemi. Po oddaleniu się pojazdu od najbliższego ciała należy zastąpić jego pole grawitacyjne $F_0 = -\mu|x|^{-3}x$ bardziej dokładnym i skomplikowanym polem najbardziej oddziałujących na nie ciał. Dalszy rozwój tej teorii trwa do dnia dzisiejszego, koncentrując się nie tylko na doskonaleniu dokładności opisu ale też na wykorzystaniu nowych, „bezkosztowych” sił napędu np. pochodzących z energii słonecznej lub energii innych ciał.

W naszym referacie, po historycznym wstępie, zajmiemy się geometrią układów sterowania drugiego rzędu, a w szczególności układów, w których ruch swobodny opisany jest równaniami różniczkowymi drugiego rzędu. Wprowadzimy pojęcie krzywizny takich układów. Pokażemy sens geometryczny krzywizny i jej rolę w równaniu odchylenia (dewiacji) trajektorii ruchu swobodnego. Następnie pokażemy, jak pojęcia te można wykorzystać do analizy układów sterowania opisywanych formalizmem Lagrange’a, w tym dla ruchu pojazdów kosmicznych.

Nasze pojęcia zilustrujemy na przykładzie keplerowskiego układu sterowania (K). W szczególności pokażemy, że dla siły działającej wzdłuż promienia, a również siły poprzecznej do orbity, krzywizna układu jest dodatnia, co oznacza, że odchylenie trajektorii swobodnych oscyluje okresowo, znikając po każdym okresie. Z drugiej strony, siła działająca wzdłuż ruchu daje krzywiznę ujemną, a więc powoduje, że odchylenia ruchu swobodnego są „eksponencjalnie” rozszerzające. Ten trzeci przypadek wykorzystuje się w misjach międzyplanetarnych stosując efekt tzw. procy grawitacyjnej (taką rolę odgrywają mijane w małej odległości planety pośrednie oddające energię pojazdowi kosmicznemu).

Pole grawitacyjne dwu ciał jest bardziej złożone. Dla krążących kółeczko wokół wspólnego środka ciężkości dwu ciał niebieskich już Lagrange odkrył, że pole grawitacyjne tych ciał zawiera pięć szczególnych punktów, w których trzecie ciało o małej masie pozostaje w spoczynku w układzie krążącym z dwoma ciałami. Punkty te, zwane obecnie punktami Lagrange’a, są również wykorzystywane w kosmicznej nawigacji, a także w praktycznym rozmieszczaniu satelitów użytkowych. Szczegółowa analiza zachowania układów sterowanych wokół tych punktów nie jest dotąd dostępna.