Tomasz Małolepszy
Uniwersytet Zielonogórski, Wydział Matematyki, Informatyki i Ekonometrii
E-mail: `t.malolepszy@wmie.uz.zgora.pl`

Analiza istnienia rozwiązań wybuchających w pewnym modelu superdyfuzji

Do opisu procesu superdyfuzji w nieograniczonym obszarze przestrzennym mogą służyć np. nieliniowe ułamkowe równania różniczkowe cząstkowe wraz z odpowiednimi warunkami początkowo-brzegowymi. Przykładowym modelem [3] tego typu jest zagadnienie

$$\frac{\partial}{\partial t}T(x,t) = \frac{\partial^\alpha}{\partial |x|^\alpha}T(x,t) + \lambda D(x|0)g(T(0,t)),$$

z warunkiem początkowym

$$T(x,0) = 0,$$

oraz z warunkiem

$$\lim_{|x|\to\infty} T(x,t) = 0,$$

gdzie $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, parametr λ jest dodatni, operator $\frac{\partial^\alpha}{\partial |x|^\alpha}$, gdzie $1 < \alpha < 2$, jest operatorem pochodnej ułamkowej Riesza, zaś

$$D(x|0) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega, \\ 0, & x \notin \Omega, \end{cases}$$

gdzie $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : -a < x_i < a,\ i = 1\ldots,n\}$, $0 < a \ll 1$. Będziemy zajmować się istnieniem tzw. rozwiązań wybuchających w powyższym modelu przy założeniu, że obszar przestrzenny jest równy $\mathbb{R}^n$, $n = 1,2,3$. O funkcji g założymy, że jest to ściśle rosnąca funkcja absolutnie ciągła, spełniająca warunki

$$g(0) = 0,$$
$$t/g(t) \to 0 \text{ przy } t \to 0^+,$$
$$t/g(t) \to 0 \text{ przy } t \to \infty.$$

Pokażemy, że w takiej sytuacji, przy pewnym dodatkowym założeniu, rozwiązanie wybuchające w przypadku jednowymiarowym będzie zawsze istnieć, natomiast w wyższych wymiarach istnienie takiego rozwiązania będzie ściśle związane z parametrem superdyfuzji λ. Kluczowym krokiem w naszej analizie będzie powiązanie wyjściowego modelu z pewnym nieliniowym równaniem całkowym Volterry typu splotowego postaci

$$u(t) = \int_0^t k(t-s)g(u(s))ds, \quad t \geq 0$$

i badanie istnienia rozwiązań wybuchających tego równania całkowego [1, 2].

Bibliografia

[1] T. Małolepszy, *Nonlinear Volterra integral equations and the Schröder functional equation*, Nonlinear Anal. 74 (2011), 424–432.
[2] W. Mydlarczyk, *A condition for finite blow-up time for a Volterra integral equation*, J. Math. Anal. Appl. 181 (1994), 248–253.
[3] W. E. Olmstead, C. A. Roberts, *Dimensional influence on blow-up in a superdiffusive medium*, SIAM J. Appl. Math. 70 (2010), 1678–1690.