dr hab. inż. Adam Czornik, mgr inż. Michał Niezabitowski
Politechnika Śląska w Gliwicach, Wydział Automatyki, Elektroniki i Informatyki
Instytut Automatyki, Zakład Sterowania i Robotyki

Wykładniki Lapunowa układów liniowych z nieograniczonymi współczynnikami

W pracy rozważamy dyskretny układ liniowy

$$x(n+1) = A(n)x(n),\ n \geq 0, \tag{1}$$

gdzie $\big(A(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem macierzy kwadratowych stopnia s. Rozwiązanie równania (1) z warunkiem początkowym będziemy oznaczać jako $x(n, x_0)$. Jeżeli ciąg $A(n)$ jest nieograniczony, to klasyczny wykładnik Lapunowa zdefiniowany jako

$$\lambda(x_0) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \|x(n, x_0)\|,\ x_0 \neq 0,$$

może nie być skończony. Fakt ten powoduje, że nie możemy używać klasycznej teorii wykładników Lapunowa dla układów z nieograniczonymi współczynnikami.

Głównym celem tej pracy jest zaproponowanie uogólnienia pojęcia wykładników Lapunowa tak, aby można było przy ich pomocy analizować układy z nieograniczonymi współczynnikami. Proponowane uogólnienie ma następującą postać:

Niech $q(n)$ będzie rosnącym ciągiem liczb rzeczywistych dążącym do nieskończoności. Liczbę

$$\chi(x_0, q) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{q(n)} \ln \|x(n, x_0)\|,\ x_0 \neq 0,$$

będziemy nazywać uogólnionym wykładnikiem Lapunowa względem ciągu $q(n)$.

W pracy pokazano, że dla każdego ciągu $A(n)$ istnieje ciąg $q(n)$, dla którego wszystkie uogólnione wykładniki Lapunowa są skończone, oraz zbiór $\{\chi(x_0, q) : x_0 \in \mathbb{R}^s\}$ zawiera co najwyżej s elementów. Największy element tego zbioru oznaczmy przez $\chi(q)$. Okazuje się, że nierówność $\chi(q) < 0$ implikuje eksponencjalną stabilność układu (1). Fakt ten umożliwia zastosowanie proponowanego w pracy uogólnienia wykładnika Lapunowa do analizy stabilności układu z nieograniczonymi współczynnikami. Kolejnym etapem pracy było zbadanie podstawowych własności uogólnionych wykładników Lapunowa. Jednym z ciekawszych wyników tej części pracy jest następujące uogólnienie nierówności Lapunowa:

Twierdzenie. *Niech V będzie dowolną bazą przestrzeni $\mathbb{R}^s$. Oznaczmy przez σ_V sumę wszystkich liczb ze zbioru $\{\chi(x_0, q) : x_0 \in V\}$. Wówczas*

$$\sigma_V \geq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{q(n)} \sum_{i=0}^{n-1} \ln|\det A(i)|.$$

Centralnym wynikiem pracy jest uogólnienie twierdzenia o przybliżeniu liniowym na układy z nieograniczonymi współczynnikami. Na potrzeby tego twierdzenia uogólniono pojęcie układów regularnych.

Wraz z układem (1) rozważmy układ nieliniowy

$$y(n+1) = A(n)y(n) + f(n, y(n)), \tag{2}$$

gdzie $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$ jest taka, że

$$\|f(n,x)\| \leq C_g(n)\|x\|^m$$

dla pewnego ciągu $\big(C_g(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ liczb rzeczywistych dodatnich i $m > 1$.

Głównym rezultatem pracy jest następujące

Twierdzenie. *Przypuśćmy, że następujące warunki są spełnione:*

1) *Układ* (1) *jest regularny.*
2) $\chi(q) < 0$, *gdzie* $\chi(q)$ *jest największym uogólnionym wykładnikiem Lapunowa układu* (1).
3) $\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{q(n)} \ln C_g(n) = 0$.

Wówczas układ (2) *jest eksponencjalnie stabilny.*

Publikacja jest jednym z efektów badań sfinansowanych ze środków BK 214/RAU1/2011 otrzymanych na działalność statutową w ramach dotacji na utrzymanie potencjału badawczego.