

Rafał Nowak
 Uniwersytet Wrocławski
 Wydział Matematyki i Informatyki
 Instytut Informatyki

Przyspieszanie zbieżności ułamków łańcuchowych dwuwariantowych

Komunikat przedstawia metodę przyspieszania zbieżności takich ułamków łańcuchowych

$$\mathbf{K}_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n}{b_n} + \frac{a'_n}{b'_n} \right],$$

że dla wszystkich dostatecznie dużych n liczniki a_n, a'_n i mianowniki b_n, b'_n są wielomianami zmiennej n . Metoda korzysta z faktu, że jeśli \tilde{t}_n jest dostatecznie dobrym przybliżeniem ogona t_n ułamka łańcuchowego, to n -ty redukt zmodyfikowany

$$S_n(\tilde{t}_n) := \frac{A_n + A_{n-1} \tilde{t}_n}{B_n + B_{n-1} \tilde{t}_n},$$

gdzie A_n i B_n są odpowiednio licznikiem i mianownikiem n -tego zwykłego reduktu, jest dobrym przybliżeniem wartości ułamka.

Metoda opiera się na poprawianiu przybliżeń nieparzystych ogonów. Dysponując przybliżeniami \tilde{u}_n ogonów t_{2n-1} , metoda wyznacza nowe przybliżenia \hat{u}_n , dla których

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\hat{u}_n - t_{2n-1}}{\tilde{u}_n - t_{2n-1}} = 0.$$

Proponowany wzór na \hat{u}_n jest bardzo prosty — wykonywanych jest tylko kilka działań arytmetycznych.

Metodę można iterować, tzn. przyjmując \hat{u}_n jako przybliżenia \tilde{u}_n w następnej iteracji metody. W ten sposób powstaje tablica coraz lepszych przybliżeń nieparzystych ogonów.

Proponowana metoda jest bardzo efektywna. Często jej dwudziesta iteracja daje kilkanaście cyfr dokładnych wartości ułamka, podczas gdy tysięczny zwykły redukt daje trzy cyfry dokładne, a czasami nawet w ogóle nie przybliża wartości ułamka.