

Tadeusz Rzeżuchowski, dr hab., prof. nz.
Wydział MiNI Politechniki Warszawskiej

Cztery różne metryki w rodzinie zbiorów wypukłych

Oprócz znanej metryki Hausdorffa w przestrzeni zbiorów wypukłych i zwartych w \mathbb{R}^n wprowadza się inne, nierównoważne jej, które pozwalają wychwycić bardziej subtelne różnice pomiędzy zbiorami, a konkretnie różnice pomiędzy ich rodzinami ścian podpierających.

Andrzej Pliś wprowadził w pracy [6] metrykę, którą wykorzystywał przy dowodzeniu jednoznaczności rozwiązania zagadnienia w sterowaniu optymalnym. Metryka ta, później zapomniana, funkcjonuje obecnie ponownie wprowadzona i stosowana do zagadnień optymalizacji przez Vladimira Demyanova. Znana jest pod jego imieniem. Mówiąc obrazowo, zbiory są bliskie w sensie metryki Demyanova, jeśli ich ściany podpierające w tych samych kierunkach są sobie bliskie i to jednostajnie względem kierunków [2], [7]. Metryka ta może być rozszerzana na rodzinę zbiorów wypukłych, niekoniecznie domkniętych [5], [4]. Powstaje przestrzeń niezupełna, a problem charakteryzacji jej uzupełnienia jest tylko częściowo rozwiązany [3].

Inną propozycją jest tak zwana metryka Bartelsa-Pallaschke, która związana jest z relacją równoważności pozwalającą zanurzyć rodzinę zbiorów wypukłych i zwartych w przestrzeni unormowanej. Jest ona silniejsza niż metryka Demyanova [2], ale problem jej interpretacji nie jest tak dobrze rozumiany jak w przypadku metryki Demyanova.

Jeszcze inną propozycją, mało do tej pory opracowaną, jest metryka operująca odległościami wykresów multifunkcji, których argumentami są wektory ze sfery jednostkowej, a wartościami odpowiednie ściany podpierające zbiorów. Jest ona nieco słabsza niż metryka Demyanova, co wyraża się m.in. tym, że obroty zbiorów są odwzorowaniami ciągłymi, co nie ma miejsca w przypadku metryki Demyanova. Z drugiej strony jest wystarczająco silna, żeby bliskie zbiory miały podobne struktury rodzin zbiorów podpierających.

Bibliografia

- [1] V. F. Demyanov, A. M. Rubinov, *Constructive Nonsmooth Analysis*, Peter Lang, 1995.
- [2] P. Diamond, P. Kloeden, A. Rubinov, A. Vladimirov, *Comparative properties of three metrics in the space of compact convex sets*, Set-Valued Analysis 5 (1997), 267–289.
- [3] J. Grzybowski, A. Leśniewski, T. Rzeżuchowski, *The completion of the space of convex, bounded sets with respect to the Demyanov Metric*, Demonstratio Mathematica, przyjęta.
- [4] A. Leśniewski, *Topological properties of some metrics on the space of convex closed sets*, złożona.
- [5] A. Leśniewski, T. Rzeżuchowski, *The Demyanov metric for convex, bounded sets and existence of Lipschitzian selectors*, Journal of Convex Analysis 18 (2011), 737–747.
- [6] A. Pliś, *Uniqueness of optimal trajectories for non-linear control systems*, Ann. Polon. Math. XXIX (1975), 397–401.
- [7] A. Rubinov, A. Vladimirov, *Differences of convex compacta and metric spaces of convex compacta with applications: A survey*, w: Quasidifferentiability and Related Topics, red. V. Demyanov, A. Rubinov, Kluwer, 2000.