mgr inż. Aneta Szyda
Politechnika Śląska, Wydział Automatyki, Elektroniki i Informatyki
Gliwice

Promień spektralny jako metoda badania stabilności ciągłych układów liniowych o zmiennych w czasie współczynnikach

W pracy rozważano ciągłe układy liniowe o zmiennych w czasie współczynnikach postaci

$$\dot{x}(t) = A_\sigma(t)x(t) \tag{1}$$

z warunkiem początkowym $x(t_0) = x_0$, gdzie $\Sigma = \{A_i : i \in I\}$ — zbiór macierzy $\mathbb{R}^{n\times n}$, t_0 — chwila początkowa, $\sigma : [t_0, \infty) \to I$ — funkcja przedziałami stała, lewostronnie ciągła (funkcja przełączająca). Funkcja σ ma skończoną liczbę punktów nieciągłości na każdym przedziale ograniczonym.

Dla ustalonego zbioru $\Sigma = \{A_i : i \in I\}$ zbiór wszystkich funkcji przełączających spełniających założenia zadane na funkcje przełączającą σ oznaczmy $S(\Sigma)$. Przy poczynionych założeniach układ (1) posiada dokładnie jedno rozwiązanie dla każdego x_0, oznaczmy je $x(\sigma, x_0, t)$ dla ustalonej funkcji $\sigma \in S(\Sigma)$ i $x_0 \in \mathbb{R}^n$, ma ono postać:

$$x(\sigma, x_0, t) = \left[e^{A_{\sigma(t_k)}(t-t_k)} e^{A_{\sigma(t_{k-1})}(t-t_{k-1})} \cdots e^{A_{\sigma(t_0)}(t-t_0)}\right] x_0, \tag{2}$$

gdzie $t_k < t \leq t_{k-1}$ — kolejne punkty nieciągłości funkcji σ (chronologiczne chwile przełączeń).

Oznaczmy: $\Sigma^m = \{A_1A_2 \ldots A_m : A_i \in \Sigma,\ i = 1, \ldots, m\}$ — zbiór wszystkich iloczynów macierzy zbioru Σ długości m; niech $\rho(A)$ — promień spektralny, a $\|A\|$ — norma macierzowa macierzy A, dalej zbiory: $\alpha_m = \sup_{A\in\Sigma^m} \|A\|$, $\alpha_{*m} = \inf_{A\in\Sigma^m} \|A\|$, $\beta_m = \sup_{A\in\Sigma^m} \rho(A)$, $\beta_{*m}0 = \inf_{A\in\Sigma^m} \rho(A)$, zdefiniujmy:

- Wspólny promień spektralny $\hat{\rho}(\Sigma) = \inf_{m\in\mathbb{N}}(\alpha_m)^{1/m}$;
- Uogólniony promień spektralny $\bar{\rho}(\Sigma) = \sup_{m\in\mathbb{N}}(\beta_m)^{1/m}$;
- Wspólny dolny promień spektralny $\hat{\rho}_*(\Sigma) = \inf_{m\in\mathbb{N}}(\alpha_{*m})^{1/m}$;
- Uogólniony dolny promień spektralny $\bar{\rho}_*(\Sigma) = \inf_{m\in\mathbb{N}}(\beta_{*m})^{1/m}$.

Między powyższymi liczbami zachodzą następujące równości:

- Dla dowolnego zbioru ograniczonego Σ mamy $\hat{\rho}(\Sigma) = \bar{\rho}(\Sigma) = \rho(\Sigma)$; $\rho(\Sigma)$ — wspólna wartość wspólnego i uogólnionego promienia spektralnego — **uogólniony promień spektralny**;
- Dla dowolnego niepustego zbioru macierzy o współczynnikach zespolonych zachodzi $\hat{\rho}_*(\Sigma) = \bar{\rho}_*(\Sigma) = \rho_*(\Sigma)$; $\rho_*(\Sigma)$ — wspólna wartość wspólnego i uogólnionego dolnego promienia spektralnego — **uogólniony dolny promień spektralny**.

Rozważano zależności łączące $\rho(\Sigma)$ oraz $\rho_*(\Sigma)$ ze stabilnością dla układu (1); dla przypomnienia:

- Układ (1) nazywamy **absolutnie asymptotycznie stabilnym**, jeżeli spełniony jest warunek

$$\forall x_0 \, \forall \sigma \in S(\Sigma) \ \lim_{t\to\infty} x(\sigma, x_0, t) = 0. \tag{3}$$

- Układ (1) nazywamy **selektywnie asymptotycznie stabilnym**, jeżeli spełniony jest warunek

$$\exists \sigma \in S(\Sigma) \, \forall x_0 \ \lim_{t\to\infty} x(\sigma, x_0, t) = 0. \tag{4}$$

W pracy podano autorskie twierdzenia wiążące stabilność układu (1) z uogólnionym promieniem spektralnym oraz uogólnionym dolnym promieniem spektralnym pewnego zbioru:

Twierdzenie 1. *Jeżeli* Σ *jest zbiorem skończonym, to układ* (1) *jest absolutnie asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\rho(\tilde{\Sigma}) < 1, \tag{5}$$

gdzie

$$\tilde{\Sigma} = \{e^{At} : A \in \Sigma, \ t \in [t_0, \infty)\}. \tag{6}$$

Twierdzenie 2. *Układ* (1) *jest selektywnie asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\rho(\tilde{\Sigma}) < 1, \tag{7}$$

gdzie $\tilde{\Sigma}$ *jest określony przez* (6).

Udowodnione twierdzenia dotyczą ciągłych układów liniowych o przedziałami stałych współczynnikach i dostarczają warunków koniecznych i wystarczających dla absolutnej asymptotycznej stabilności (twierdzenie 1), gdy Σ jest zbiorem skończonym oraz selektywnej asymptotycznej stabilności (twierdzenie 2) dla dowolnego zbioru.

Projekt został sfinansowany ze środków Narodowego Centrum Nauki w Krakowie (N N514 590040).