prof. dr hab. inż. Andrzej Wawrzynek
Politechnika Śląska w Gliwicach
dr inż. Marcin Detka
Politechnika Świętokrzyska w Kielcach
dr inż. Jerzy Pilśniak
Politechnika Śląska w Gliwicach

Zagadnienia odwrotne z nieskończoną liczbą parametrów decyzyjnych

W pracy zostanie pokazane zastosowanie tzw. *konsekwentnej metody R-funkcji* [1,2] do rozwiązywania zadań odwrotnych opisujących ustalony przepływ ciepła, czyli analizowane jest równanie Laplace'a lub Poissona opisujące rozkład temperatury $T(x,y)$ w znanym, dowolnie złożonym geometrycznie obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, z różnymi rodzajami warunków brzegowych na różnych częściach brzegu. Założono, że na jednej z części brzegu $\partial\Omega_{\mathrm{un}}$ nieznana jest funkcja f_{un} opisująca warunek Neumana (strumień ciepła), postaci: $\partial T(x,y)/\partial n|_{\partial\Omega_{\mathrm{un}}} = f_{\mathrm{un}}(x,y)$. W zamian określone są wartości funkcji $T(x,y)$ w skończonej liczbie N_{pom} punktów brzegowych.

W zagadnieniach bezpośrednich (*direct problem*), pierwszy etap metody R--funkcji polega na analitycznym wyprowadzeniu równań analizowanego obszaru Ω, postaci $\omega(x,y)|_{\partial\Omega} = 0$, oraz wszystkich części jego brzegu, wykorzystując zupełny układ R-funkcji, analogiczny do układu funkcji logicznych: koniunkcji, alternatywy i negacji:

$$f_{\mathrm{kon}}(x,y) = x \wedge_0 y = x + y - \sqrt{x^2+y^2},$$
$$f_{\mathrm{dys}}(x,y) = x \vee_0 y = x + y + \sqrt{x^2+y^2}, \quad f_{\mathrm{neg}}(x) = \bar{x} = -x.$$

W drugim etapie wyprowadzana jest tzw. *struktura rozwiązania*, która jest funkcją spełniającą w sposób ścisły zadane warunki brzegowe:

$$T(x,y) = \omega(x,y)\Phi(x,y) + \theta_0(x,y),$$

gdzie $\Phi(x,y) \approx \sum_{i,j} a_{ij}\varphi_{ij}(x,y)$ jest np. szeregiem Czebyszewa, z nieznanymi współczynnikami a_{ij}; ω — równaniem brzegu obszaru Ω; $\theta_0 = \theta_0(x,y)$ — znaną funkcją składającą się z równań części brzegu oraz funkcji definiujących warunek Dirichleta. Współczynniki a_{ij} wyznacza się z wariacyjnego sformułowania równań problemu, np. postaci (por. [2, 3]):

$$J[T] = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 \right) d\Omega$$
$$+ \left(\int_{\partial\Omega_2} T f_2(x,y)\, d\partial\Omega_2 \right) + \left(\int_{\partial\Omega_3} T f_3(x,y)\, d\partial\Omega_3 \right) + \ldots \approx J[a_{ij}],$$

gdzie f_2, f_3 — funkcje opisujące warunki Neumana na odpowiednich częściach brzegu.

Zastosowanie metody R-funkcji pozwala, w przypadku zagadnienia odwrotnego, nie uwzględniać nieznanego warunku brzegowego ani w strukturze rozwiązania ani w funkcjonale. Rozwiązanie poniższego nadokreślonego układu równań

$$\begin{cases} \dfrac{\partial J[a_{ij}]}{\partial a_{kl}} = 0, & k, l = 1, \ldots, N \\ T_\alpha^{(\mathrm{pom})} = T(x_\alpha, y_\alpha), & \alpha = 1, \ldots, N_{\mathrm{pom}} \end{cases}$$

umożliwia znalezienie ciągłej i różniczkowalnej funkcji $T(x, y)$, będącej przybliżeniem rozwiązania odpowiedniego problemu brzegowego, w tym nieznaną, ciągłą funkcję f_{un} opisującą warunek Neumana. W prezentacji pokazane będą proste przykłady ilustrujące metodę.

Literatura

[1] M. Detka, *Zastosowanie metody R-funkcji do rozwiązywania dwuwymiarowych problemów mechaniki konstrukcji o złożonej geometrii i warunkach brzegowych*. Praca doktorska, Politechnika Świętokrzyska, 2011.

[2] V. L. Rvachev, *Geometric Applications of Logic Algebra*. Naukova Dumka, Kiev, 1967.

[3] A. Wawrzynek, *Modelowanie krzepnięcia i stygnięcia metali oraz problemów dyfuzji ciepła za pomocą metody R-funkcji*, ZN Pol. Śl., Mechanika z. 119, 1994.