dr Arkadiusz Misztela
Instytut Matematyki Uniwersytetu Szczecińskiego
E-mail: `arke@mat.umk.pl`

Lipschitzowskie minimizery w problemach optymalizacji

Przeważnie problemy optymalizacji wykazują zjawisko Lavrentieva. Lavrentiev w roku 1926 zauważył, że nie zawsze istnieją lipschitzowskie rozwiązania problemów optymalizacji. Później skonstruowano wiele bardzo regularnych przykładów wykazujących zjawisko Lavrentieva, takim popularnym przykładem jest przykład Mania z 1934 roku. Zazwyczaj występowanie zjawiska Lavrentieva wiąże się z wieloma problemami związanymi z optymalizacją. Rozwiązania problemów optymalizacji będziemy nazywać mnimizerami. Naszym celem jest pokazanie, przy odpowiednich założeniach, że istnieją lipschitzowskie minimizery problemów optymalizacji, które opisują następujące równanie Hamiltona-Jacobiego z warunkiem końcowym:

$$\begin{aligned} -U_t + H(t,x,U,-U_x) &= 0 \text{ na } (0,T)\times\mathbb{R}^n, \\ U(T,x) &= g(x) \text{ na } \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{1}$$

Opisanie równania (1) za pomocą problemów optymalizacji jest możliwe dzięki założeniu wypukłości hamiltonianu $H(t,x,u,p)$ ze względu na p. Problemy optymalizacji opisujące równanie (1) to problemy Mayera parametryzowane przez $(t_0,x_0)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n$:

$$(\mathcal{P}_{t_0,x_0}) \qquad \begin{aligned} &\text{minimum} \qquad \Lambda_{x_0}(x(t_0),u(t_0),x(T),u(T)) \\ &\text{przy warunku } (\dot{x}(t),\dot{u}(t))\in Q(t,x(t),u(t)) \text{ p.w. } t\in[t_0,T], \end{aligned}$$

minimalizacja $(\mathcal{P}_{t_0,x_0})$ odbywa się po zbiorze $\mathcal{AC}([t_0,T],\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})$, a funkcja kosztu $\Lambda_z(\cdot)$ oraz multifunkcja $Q(\cdot)$ są zadane w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \Lambda_z(x_a,u_a,x_b,u_b) &= \Psi_{\{z\}}(x_a)+u_a+\Psi_{\mathrm{epi}\,g}(x_b,u_b), \\ Q(t,x,u) &= \{(v,-\eta)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R} : \eta\geqslant L(t,x,u,v)\}, \end{aligned} \tag{2}$$

gdzie $\Psi_K(\cdot)$ jest funkcją indykatorową zbioru $K\subset\mathbb{R}^n$, a $L(t,x,u,\cdot)$ funkcją dualną do hamiltonianu $H(t,x,u,\cdot)$ nazywaną lagrangianem.

Korzystając z warunków koniecznych optymalności Loewena-Rockafellara dla zagadnienia (2), dowodzimy, przy najnowszych założeniach optymalności, że istnieją lipschitzowskie minimizery problemów optymalizacji (2). W przypadku zagadnień rozważanych przez nas lipschitzowskie minimizery są pożądane, gdyż pełnią kluczową rolę w dowodach następujących zagadnień:

- ▷ funkcja wartości $V(\cdot)$ jest rozwiązaniem (1),
- ▷ funkcja wartości $V(\cdot)$ jest jednoznacznym rozwiązaniem (1),
- ▷ funkcja wartości $V(\cdot)$ spełnia lokalnie warunek Lipschitza.

Funkcja wartości nazywana również funkcją Bellmana $V:[0,T]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ jest tutaj definiowana jako najmniejsza wartość problemu (2) parametryzowana przez (t_0,x_0).

Bibliografia

[1] P. D. Loewen, R. T. Rockafellar, *Optimal control of unbounded differential inclusions*, SIAM J. Control Optim., 32 (1994), 442–470.

[2] S. Plaskacz, M. Quincampoix, *On representation formulas for Hamilton Jacobi's equations related to calculus of variations problems*, Topol. Methods Nonlinear Anal. 20 (2002), 85–118.