dr Arkadiusz Misztela
Wydział Matematyczno-Fizyczny Uniwersytetu Szczecińskiego
E-mail: arke@mat.umk.pl

O niejednoznaczności rozwiązań równania Hamiltona–Jacobiego–Bellmana

Klasycznym problemem Cauchy'ego dla równania Hamiltona–Jacobiego–Bellmana jest równanie różniczkowe cząstkowe pierwszego rzędu z warunkiem końcowym

$$\begin{aligned} -U_t + H(t,x,-U_x) = 0 \quad &\text{na} \quad]0,T[\times \mathbb{R}^n, \\ U(T,x) = g(x) \quad &\text{na} \quad \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{HJB}$$

Jeżeli hamiltonian $H(t,x,p)$ jest wypukły ze względu na p, to istnieje zależność między rozwiązaniem równania HJB a problemami optymalizacji pochodzącymi od funkcji dualnej do hamiltonianu. Ta funkcja, nazywana lagrangianem i oznaczana przez L, jest transformatą Legendrea–Fenchela hamiltonianu H ze względu na p. Teraz uściślijmy powyższe zależności. Problem Bolza parametryzujemy w (t,x) następująco

$$\text{minimize} \quad \Gamma(x(\cdot)) := g(x(T)) + \int_t^T L(s,x(s),\dot{x}(s))\,ds, \tag{$\mathcal{P}_{t,x}$}$$

gdzie Γ jest minimalizowana po wszystkich absolutnie ciągłych funkcjach $x:[t,T]\to\mathbb{R}^n$ takich, że $x(t)=x$. *Funkcją wartości* nazywamy odwzorowanie $V:[0,T]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, które każdemu punktowi (t,x) przyporządkowuje najmniejszą wartość $\mathcal{P}_{t,x}$. Jeżeli funkcja wartości jest różniczkowalna, to wiadomo, że jest klasycznym rozwiązaniem równania HJB. Jednakże w wielu sytuacjach funkcja wartości nie jest różniczkowalna. Wtedy rozwiązanie musi być zdefiniowane w sensie niegładkim, tak aby funkcja wartości była jednoznacznym rozwiązaniem HJB. W 1980 Crandall i Lions wprowadzili niegładkie lepkościowe rozwiązania, które w kolejnych latach budziły zainteresowanie wielu matematyków. Wśród różnych kwestii związanych z lepkościowymi rozwiązaniami badano zagadnienia istnienia i jednoznaczności. Rozwiązania lepkościowe są zawsze funkcjami ciągłymi. Zatem w problemach, w których funkcja wartości jest półciągła (nieciągła), potrzebne było inne pojęcie rozwiązania. Problem ten został niezależnie rozwiązany w pracy Barrona–Jensena [2] oraz pracy Frankowskiej [3] przez wprowadzenie rozszerzonych rozwiązań lepkościowych. Frankowska rozwiązania w [3] nazywa *dolnie półciągłymi rozwiązaniami.*

Naszym celem jest przedstawienie przykładu niejednoznaczności rozwiązań równania HJB z zaskakująco regularnym hamiltonianem. Zaproponowany hamiltonian spełnia lokalnie warunek Lipschitza ze względu na zespół zmiennych (t,x,p) w szczególności ze względu na zmienną stanu x. Ponadto hamiltonian ten ze względu na p jest wypukły i ma liniowy wzrost. Mając równanie HJB z hamiltonianem spełniającym powyższe własności wskazujemy dwa różne dolnie półciągłe rozwiązania z tym samym warunkiem końcowym. Ponadto pokazujemy, że jednym z tych rozwiązań jest funkcja wartości. Nasz przykład niejednoznaczności pozwala lepiej zrozumieć jaką rolę pełnią warunki typu Lipschitza w jednoznaczności rozwiązań równania HJB.

Bibliografia

[1] M. G. Crandall, P.-L. Lions, *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Trans. Amer. Math. Soc. 277 (1983), 1–42.

[2] E. N. Barron, R. Jensen, *Semicontinuous viscosity solutions for Hamilton-Jacobi equations with convex Hamiltonians*, Comm. Partial Differential Equations 15 (1990), 1713–1742.

[3] H. Frankowska, *Lower semicontinuous solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman equations*, SIAM J. Control Optim. 31 (1993), 257–272.