Izabella Czochralska
Instytut Ekonometrii SGH, Warszawa

Źle uwarunkowane układy równań liniowych z symetryczną macierzą współczynników

Rozważmy cramerowski układ równań liniowych:

$$Ax = b \tag{1}$$

z nieosobliwą macierzą współczynników A stopnia n, wektorem zmiennych $x \in \mathbb{R}^n$ oraz wektorem wyrazów wolnych $b \in \mathbb{R}^n$.

Znanych jest wiele skutecznych i zaprogramowanych metod dokładnych i iteracyjnych rozwiązywania układu (1) z macierzą pełną lub rzadką, małych, czy dużych rozmiarów.

Szczególne podejście stosuje się przy rozwiązywaniu układu (1), gdy macierz współczynników A jest symetryczna. Wtedy w wyniku zwykłej eliminacji Gaussa wszystkie macierze zredukowane także są symetryczne, a to prawie dwukrotnie zmniejsza koszty obliczeń, gdyż można pominąć obliczanie elementów pod przekątną.

Jeśli macierz A jest dodatnio określona lub ma dominującą przekątną, to w każdej iteracji elementy główne znajdują na przekątnej, co stwarza możliwość eliminacji z pełnym wyborem elementu głównego bez naruszenia symetrii macierzy (także określoności).

Problem pojawia się w przypadku, gdy macierz A jest nieokreślona i ma wiele zerowych elementów na przekątnej. Oczywiście, zawsze układ (1) można przekształcić do postaci normalnej:

$$A^T Ax = A^T b \tag{2}$$

z dodatnio określoną macierzą współczynników Grama. Jednakże takie działanie pogłębia zwykle złe uwarunkowanie zadania i wprowadza znaczne zaburzenia wśród danych początkowych.

Można jednak uwarunkować układ (1) z nieokreśloną macierzą współczynników w skuteczny i tani sposób, adaptując metodę diagonalizacji macierzy symetrycznej podaną w pracy [1], co będzie przedmiotem referatu.

Literatura

[1] I. Czochralska, *A verification of the definiteness of a quadratic form – its canonical form*, Badania Operacyjne i Decyzje, nr 1 (1996), s. 3–26.