Piotr Jaworski
Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

VaR dla portfeli zawierających aktywa o asymptotycznie zależnych zwrotach

Rozważamy portfel inwestycyjny złożony z d różnych papierów wartościowych. Oznaczmy przez $S_{i,0}$ i $S_{i,1}$ kurs i-tego papieru na początku i na końcu okresu inwestycyjnego, a przez s_i przyrost logarytmiczny kursu

$$s_i = ln(\frac{S_{i,1}}{S_{i,0}}).$$

$S_{i,0}$ są znane w momencie rozpoczęcia inwestycji a $S_{i,1}$ i s_i modelujemy jako zmienne losowe.

Założenia modelowe

- s_i mają rozkłady z potęgowymi dolnymi ogonami o tym samym indeksie $\gamma > 2$. Dla $x < -\bar{x}$
$$F_i(x) = P(s_i \leq x) = a_i(-x)^{-\gamma}.$$
- Łączny rozkład s_i jest ciągły i jest opisany przez kopulę C posiadającą jednorodny dolny ogon. Dla $q = (q_1, \dots q_d)$ takich, że $0 \leq q_i \leq a_i \bar{x}^{-\gamma}$, $C(q) = L(q)$, gdzie L pewna niezerowa dodatnio jednorodna funkcja ($\forall t > 0 \quad L(tq) = tL(q)$).
- Wyznaczona przez L miara μ_L jest jest ciągła względem miary Lebesque'a i poza początkiem układu współrzędnych jej gęstość jest lokalnie ograniczona.

Niech W_0 i W_1 oznaczają odpowiednio wartość portfela na początku i na końcu okresu inwestycyjnego, a $w = (w_1, \dots, w_d)$ skład „procentowy" portfela, $\sum w_i = 1$, $\forall i \;\; w_i > 0$.

$$W_1 = W_0 \cdot \Big(w_1 \frac{S_{1,1}}{S_{1,0}} + \dots + w_d \frac{S_{d,1}}{S_{d,0}} \Big).$$

VaR (Value at Risk, wartość narażona na ryzyko) dla poziomu ufności $1 - \alpha$ jest wyznaczony przez warunek

$$P(W_0 - W_1 \leq \mathrm{VaR}_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$$

tzn. z prawdopodobieństwem $1 - \alpha$ strata nie przekroczy $\mathrm{VaR}_{1-\alpha}$.

Twierdzenie 1. *Dla α bliskich 0*

$$\mathrm{VaR}_{1-\alpha} = W_0 \cdot \Big(1 - \prod_{i=1}^{d} w_i^{g_i} Q_{i,\alpha}^{h_i} (1 + O(\alpha^{1/\gamma})) \Big),$$

gdzie $Q_{i,\alpha}$ jest kwantylem

$$P(S_{i,1} \leq S_{i,0} Q_{i,\alpha}) = \alpha,$$

a g_i i h_i są wyznaczone przez prawdopodobieństwa warunkowe oraz γ

$$g_i = P(s_j \leq s_i | s_j \leq -\bar{x}, \;\; j = 1, \dots, d), \quad h_i = g_i \cdot P(s_j \leq -\bar{x}, \;\; j = 1, \dots, d | s_i \leq -\bar{x})^{1/\gamma},$$