*dr Marian Liskowski*
*Politechnika Poznańska,*
*Instytut Matematyki*

# Aproksymacja funkcji z przestrzeni Orlicza-Sobolewa funkcjami klasy $C_0^\infty(\Omega)$

Prezentowane wyniki dotyczą warunków koniecznych i dostatecznych, przy których zbiór $C_0^\infty(\Omega)$ jest gęsty w przestrzeni $W^{k,M}(\Omega)$, generowanej przez $\varphi$-funkcję $M$ z parametrem dla pewnych dziedzin $\Omega \subset R^n$, i stanowią rozszerzenie analogicznych wyników dla klasycznych przestrzeni Sobolewa.

Problem aproksymowania elementów przestrzeni $W^{k,M}(\Omega)$ funkcjami gładkimi był badany przez różnych autorów dla klasycznych przestrzeni Sobolewa z całkowitymi wartościami $k$, jak również w przypadku uogólnień tych przestrzeni na przypadek niecałkowitych wartości $k$ i dowolnej $N$-funkcji $M$ (np. [2], [3], [4] lub [5]).

W przestrzeni $X$ funkcji o wartościach zespolonych, lokalnie całkowalnych na $\Omega \subset R^n$, z równością prawie wszędzie na $\Omega$, określony jest modular wypukły

$$I(f) = \sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega M\left(t, |D^\alpha f(t)|\right) dt,$$

gdzie $D^\alpha f$ jest pochodną dystrybucyjną, $k$ jest ustaloną liczbą całkowitą dodatnią oraz $M$ jest dowolną $\varphi$-funkcją z parametrem. Przestrzeń Orlicza-Sobolewa określona jest w następujący sposób

$$W^{kM}(\Omega) = \{f \in X : I(af) < \infty \text{ dla pewnego } a > 0\}$$

Przy odpowiednich warunkach dla funkcji $M$, przestrzeń $W^{k,M}(\Omega)$ z normą Luxemburga $\| \, \|_{k,M}$ jest przestrzenią Banacha. Symbolem $W_0^{k,M}(\Omega)$ oznaczone jest domknięcie zbioru $C_0^\infty(\Omega)$ w $W^{kM}(\Omega)$ ze względu na normę $\| \, \|_{k,M}$.

Główne tezy dotyczą warunków koniecznych i dostatecznych nakładanych na dziedzinę $\Omega$, przy których zachodzi równość przestrzeni $W_0^{k,M}(\Omega)$ i $W^{k,M}(\Omega)$.

## Literatura

[1] R.A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York - San Francisco - London, 1975.
[2] T.K. Donaldson, N.S. Trudinger, *Orlicz-Sobolev spaces and imbedding theorems*, J. Functional Analysis 8 (1971), 52–75.
[3] H. Hudzik, *On problem of density of $C_0^\infty(\Omega)$ in generalized Orlicz-Sobolev space $W_M^k(\Omega)$ for every open set $\Omega \subset R^n$*, Comm. Mathematicae 20 (1977), 65–78.
[4] M. Liskowski, *Density of $C_0^\infty(R^n)$ in generalized Besov space $B^{k,\phi}(R^n)$*, Funct. et Approximatio 15 (1986), 185–193.
[5] N. Meyers, J. Serrin, $H = W$, Proc. Nat. Acad. USA 51 (1964), 1055–1056.