

## Model nadwyżki ubezpieczyciela ze zmiennym w czasie parametrem ryzyka i opóźnionymi realizacjami

Typowy model nadwyżki ubezpieczyciela  $S_t$  z czasem dyskretnym zakłada, że

$$S_t = (1 + i)S_{t-1} + W_t, \quad t = 1, 2, \dots,$$

gdzie  $i$  oznacza stopę przychodów z inwestycji nadwyżki, zaś  $W_1, W_2, \dots$  to zmienne losowe i.i.d., reprezentujące saldo składki i wartości szkód za okres roku. Zakłada się też, że nadwyżka początkowa  $S_0$  jest ustalona, zaś rozkład  $W_t$  jest znany. Model służy uzyskaniu odpowiedzi na pytania o ruinę — jej prawdopodobieństwo, czas zajścia, deficyt w momencie ruiny itd.

Model istotnie odbiega od rzeczywistości, gdzie proces zgłaszania i likwidacji szkód zachodzących w ciągu roku rozciąga się z reguły na lata następne. Związek modelu z rzeczywistością można przywrócić przyjmując, że zmienna  $W_t$  odpowiada pojęciowo temu, co w języku sprawozdań finansowych określamy jako wynik techniczny, a więc różnicę pomiędzy wartością składki zarobionej a wartością szkód wypłaconych powiększoną o przyrost zobowiązań (rezerw) z tytułu szkód zaszłych i niewypłaconych. Nadwyżkę  $S_t$  możemy wtedy interpretować jako stan środków własnych, zaś ruinę jako utratę wypłacalności. Taka interpretacja prowadzi jednak do komplikacji, jako że:

- Wartość szkód zaszłych ale niewypłaconych jest zmienną losową, a odpowiednia rezerwa to w istocie predyktor punktowy tej zmiennej oparty na informacji dostępnej w dniu bilansowym.

Dodatkowy problem, który w rzeczywistości komplikuje proces predykcji, to:

- Parametry rozkładu łącznej wartości szkód zachodzących w ciągu roku nie są stałe w czasie, toteż kalkulacja tak rezerw jak i składki wymaga ich predykcji.

Przedmiotem referatu jest prezentacja modelu z wbudowanymi komplikacjami obu rodzajów. Kosztem pewnych upraszczających założeń obie komplikacje wprowadzić można w taki sposób, aby zachować niezależność i ten sam rozkład zmiennych  $W_1, W_2, \dots$  i otrzymać realistyczne oceny jego parametrów. Przy okazji otrzymujemy interesujące nowe wnioski:

- model pozwala wyjaśnić fakt, że ubezpieczyciele ponoszą niekiedy straty mimo tego, że ich portfel zawiera wielką liczbę małych ryzyk, a ich doświadczenie w ubezpieczaniu tych ryzyk pochodzi z okresu kilkudziesięciu lat,
- model pozwala uzyskać bardziej realistyczny obraz gry toczonej pomiędzy nadzorem, określającym reguły stopowania działalności, a ubezpieczycielem, pragnącym prowadzić działalność niezakłóconą interwencjami nadzoru,
- model pozwala bardziej realistycznie zakreślić granice możliwych interwencji ubezpieczyciela w rozkład zmiennej losowej  $W_{t+1}$  w momencie, gdy znany jest stan nadwyżki  $S_t$ , a to skłania do rewizji założeń przyjmowanych w ramach nurtu sterowania stochastycznego procesem nadwyżki ubezpieczyciela.

Zastosowane w pracy techniki można językiem matematyki określić jako wykorzystanie twierdzenia Dooba–Meyera o dekompozycji submartyngałów, zaś językiem ekonomii jako wykorzystanie teorii racjonalnych oczekiwań. Przyjęto taką wersję założeń, aby móc oprzeć predykcję (kalkulację rezerw i kalkulację składki) na filtrze Kalmana. Tak więc praca prezentuje oryginalnie postawione pytanie, jednak techniki użyte w celu uzyskania odpowiedzi na to pytanie są od dawna znane (np. kalkulacja rezerw w oparciu o filtr Kalmana została zaproponowana w latach 80-tych).