*dr hab. Lucyna Rempulska*
*dr inż. Mariola Skorupka*
*Politechnika Poznańska*
*Instytut Matematyki*

# Aproksymacja funkcji pewnymi operatorami liniowymi

W roku 1960 W. Meyer-König i K. Zeller opublikowali w Studia Matematica (t. 19) pracę *Bernsteiniche Potenzreihen*, w której wprowadzili dodatnie operatory liniowe

$$M_n(f;x) := \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_{nk}(x)\, f\left(\frac{k}{n+k}\right) & \text{if } 0 \le x < 1, \\ f(1) & \text{if } x = 1, \end{cases}$$

gdzie

$$p_{nk}(x) := \binom{n+k}{k} x^k\,(1-x)^{n+1},$$

$k \in N_0 = \{0,1,\ldots\}$, $n \in N = N_0 \setminus \{0\}$, w przestrzeni funkcji ograniczonych $f : [0,1] \to \Re$.

W tej i kolejnych pracach przedstawili oni własności aproksymacyjne operatorów $M_n(f)$. Z opublikowanych twierdzeń wynika, że rząd aproksymacji funkcji $f$, mającej ciągłą $r$-tą pochodną ($r \ge 2$), operatorami $M_n$ jest postaci $O\left(\frac{1}{n}\right)$.

W naszej pracy wprowadzone zostały zmodyfikowane operatory Meyera-Königa i Zellera

$$M_{n;r}(f;x) := \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_{nk}(x) \sum\limits_{j=0}^{r} \frac{f^{(j)}\left(\frac{k}{n+k}\right)}{j!} \left(x - \frac{k}{n+k}\right)^j & \text{if } 0 \le x < 1, \\ f(1) & \text{if } x = 1, \end{cases}$$

funkcji różniczkowalnych $f \in C^r_{\langle 0,1 \rangle}$, $n \in N$, $r \in N_0$.

Dla powyższych operatorów podane zostały twierdzenia o rzędach aproksymacji funkcji $f \in C^r_{\langle 0,1 \rangle}$, w szczególności wykazane zostało, że

$$\max_{x \in \langle 0,1 \rangle} |M_{n,r}(f) - f| = o\left(n^{-\frac{r}{2}}\right) \quad \text{gdy} \quad n \to \infty.$$

Powyższe oszacowanie pokazuje, że rząd aproksymacji funkcji $r$-krotnie różniczkowalnych $f \in C^r_{\langle 0,1 \rangle}$, $r \ge 2$, operatorami $M_{n,r}$ jest lepszy od rzędu aproksymacji tej funkcji operatorami $M_n$.