prof. dr hab. Bolesław Szafirski
Instytut Matematyki
Uniwersytetu Jagiellońskiego

Problemy sterowania w mechanice ośrodków ciągłych

W mechanice ośrodków ciągłych (ciecze, gazy) kluczową rolę odgrywają dwa pola wektorowe: pole wektorowe prędkości i pole wektorowe położeń. Oznaczmy przez $v(x,t)$ prędkość cieczy w punkcie $x \in \mathbb{R}^3$ i w chwili $t \geq 0$. Przez $X(\alpha,t)$ oznaczmy położenie tej cząsteczki cieczy w chwili t, która w chwili $t=0$ zajmowała położenie α. Mamy więc $X(\alpha,0)=\alpha$. Między polami $v(x,t)$ i $X(\alpha,t)$ zachodzi oczywisty związek

$$\frac{\partial X}{\partial t}(\alpha,t) = v(X(\alpha,t),t). \tag{1}$$

Wynika z niego możliwość oddziaływania polem $v(x,t)$ na pole $X(\alpha,t)$. Związek (1) można więc rozważać jako układ równań dla pola $X(\alpha,t)$ ze sterowaniem $v(x,t)$. Chodzi w szczególności o znalezienie takiego sterowania optymalnego $v(x,t)$, aby po upływie czasu t pole położeń $X(\alpha,t)$ różniło się od zadanego pola $\overline{X}$ tak mało, jak to możliwe. W teorii sterowania znane są metody, przy pomocy których cel ten można osiągnąć: metoda Pontriagina lub metoda programowania dynamicznego Bellmana. Metody te wymagają wyodrębnienia konkretnych klas sterowań.

W moim referacie wyodrębnienia klas sterowań dokonuje się w szczególny sposób. Bazuje się na fakcie, że w ruchu cieczy obowiązują prawa fizyki, które prowadzą do pewnych równań różniczkowych dla $v(x,t)$. Przy poszukiwaniu optymalnego sterowania w oparciu o równanie (1) fakt ten powinien być brany pod uwagę. Najważniejsze są tu dwa układy równań dla $v(x,t)$: układ równań Eulera (dla ruchu cieczy idealnej) i układ równań Naviera-Stokesa (dla ruchu cieczy lepkiej). Pokażemy, że w tej sytuacji możliwość sterowania w oparciu o równanie (1) przy pomocy pola prędkości polega na istotnym wykorzystaniu pola rotacji prędkości.