*mgr Marek Szczęsny*
*Akademia Górniczo-Hutnicza*
*Kraków*

# Złożoność obliczeniowa problemów początkowych równań różniczkowych zwyczajnych rzędu $k$

Problem rozwiązywania równań różniczkowych jest dobrze znany w analizie numerycznej. Powstało wiele metod rozwiązywania problemów początkowych. W większości publikowanych prac badana jest wielkość błędów algorytmów (oszacowanie z góry), opartych na tzw. informacji standardowej. W niniejszej pracy przedstawiam nowe wyniki dla rozwiązywania równań różniczkowych rzędu $k$. Po pierwsze w swojej analizie dopuszczam inny rodzaj informacji. Po drugie wzbogacam analizę algorytmów o podanie oszacowania z dołu na wielkość błędów.

Zajmuję się badaniem złożoności obliczeniowej nieliniowych problemów początkowych $u^{(k)}(x) = g\left(x, u(x), u'(x), \ldots, u^{(q)}(x)\right)$, gdzie $x \in [a,b]$, $0 \leq q < k$, z danymi warunkami początkowymi. O funkcji prawej strony zakładam, że ma $r$ ograniczonych i ciągłych pochodnych cząstkowych, gdzie $r \geq 1$. Rozważam dwa rodzaje informacji o funkcji $g$: **informację standardową** zdefiniowaną przez wartości funkcji $g$ i jej pochodnych oraz **informację liniową** zdefiniowaną przez dowolne funkcjonały liniowe działające na $g$. Złożoność obliczeniowa, $\varepsilon$**-złożoność**, jest zdefiniowana jako najmniejsza ilość informacji, mierzona przez liczbę $n$ obliczeń funkcjonałów, potrzebna do rozwiązania danego problemu z zadaną dokładnością $\varepsilon$. Rozważam model **błędu najgorszego**.

Dowodzę, że używając tylko informacji standardowej nie można uzyskać błędu najgorszego mniejszego niż $\Omega(n^{-r})$, dla dowolnego $k$ i $q$. Ponieważ istnieje algorytm z błędem $O(n^{-r})$, $\varepsilon$-złożoność w przypadku informacji standardowej wynosi $\Theta\left(1/\varepsilon\right)^{1/r}$ i jest niezależna od $k$ oraz $q$. Z drugiej strony, pokazuję algorytm wykorzystujący informację całkową, którego błąd wynosi $O\left(n^{-(r+k-q)}\right)$. W ten sposób, poprzez dopuszczenie ogólnej informacji liniowej można, w porównaniu z przypadkiem informacji standardowej, uzyskać przyśpieszenie o $k-q$. Dla $q = k-1$ przyśpieszenie wynosi 1 i rośnie do $k$ dla $q = 0$. W konsekwencji $\varepsilon$-złożoność wynosi $O\left((1/\varepsilon)^{1/(r+k-q)}\right)$, a uzyskany wynik pokazuje, że w porównaniu do informacji standardowej, złożoność obliczeniowa w przypadku informacji liniowej silnie zależy od parametru $q$ oraz od rzędu $k$ równania równania różniczkowego, które rozwiązujemy.

Badam również ograniczenie dolne na złożoność obliczeniową w przypadku ogólnej informacji liniowej. Pokazuję, że wynosi ono $\Omega\left((1/\varepsilon)^{1/(r+k)}\right)$. Ograniczenia górne i dolne są zgodne dla $q = 0$. Dla pozostałych wartości $q = 1, \ldots, k-1$, problem zgodności oszacowania dolnego i górnego na $\varepsilon$-złożoność pozostaje otwarty.