dr Zbigniew Walczak
Politechnika Poznańska
Wydział Elektryczny
Instytut Matematyki

O pewnych operatorach typu Szasza-Mirakjana

Aproksymacja funkcji operatorami liniowymi była i jest przedmiotem wielu badań. Bardzo często występuje ona, gdy funkcja aproksymowana jest przedstawiona w postaci tabeli wartości i poszukujemy dla niej funkcji ciągłej lub gdy funkcję o skomplikowanym zapisie analitycznym chcemy przedstawić w prostszej postaci.

Ważną część opublikowanych wyników stanowią proste i odwrotne twierdzenia aproksymacyjne dotyczące aproksymacji punktowej funkcji ciągłej f operatorami Szasza-Mirakjana

$$S_n(f;x) := e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Operatory te zostały zbadane w różnych przestrzeniach funkcyjnych. Z przedstawionych twierdzeń wynika, że dla każdej funkcji ciągłej f

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f;x) = f(x), \qquad x \geq 0,$$

a zbieżność ta jest jednostajna w każdym przedziale $[x_1, x_2]$, $x_2 > x_1 \geq 0$. Ponadto wykazano, że dla każdej funkcji ciągłej dwukrotnie różniczkowalnej rząd aproksymacji funkcji operatorami S_n wynosi $O(1/n)$. Dla klasycznego operatora Szasza-Mirakjana mocniejsze założenia o funkcji aproksymowanej nie wpływają na rząd aproksymacji.

Wyniki te są nadal rozwijane. Wprowadzono liczne modyfikacje operatorów Szasza--Mirakjana i zbadano je pod kątem aproksymacji punktowej.

Przedstawiane wyniki dotyczą również pewnej modyfikacji operatorów S_n

$$S_{n,r}(f;x) := e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nk)^k}{k!} \sum_{j=0}^{r} \frac{f^{(j)}\left(\frac{k}{n}\right)}{j!} \left(x - \frac{k}{n}\right)^j$$

w wielomianowej przestrzeni wagowej funkcji jednej zmniennej.

Z uzyskanych twierdzeń wynika, że dla funkcji r-krotnie różniczkowalnych rząd aproksymacji funkcji operatorami $S_{n,r}$ ma wielkość $O(n^{-r/2})$. Ponadto wykazane twierdzenia aproksymacyjne dotyczą aproksymacji globalnej, tzn. aproksymacji w sensie normy rozważanej przestrzeni funkcyjnej (większość znanych wyników dotyczy aproksymacji punktowej).