dr inż. Wiesław Grygierzec
Uniwersytet Rolniczy w Krakowie
Katedra Statystyki Matematycznej

Rozwiązanie lepkościowe równania Hamiltona-Bellmana-Jacobiego dla sterowania optymalnego stochastycznego równania dyfuzji

Przedmiotem referatu jest nieskończeniewymiarowe równanie Hamiltona-Bellmana-Jacobiego drugiego rzędu

$$\begin{cases} u_t(t,x) + \langle Ax, Du(t,x)\rangle + \inf_{\alpha\in U}\left\{\frac{1}{2}\langle D^2uB_\alpha x, B_\alpha x\rangle + l(x,\alpha)\right\} = 0 \\ u(T,x) = g(x) \quad \text{dla } (t,x)\in(0,T)\times \boldsymbol{H}. \end{cases} \tag{1}$$

W powyższym równaniu $\boldsymbol{H}$ jest ośrodkową przestrzenią Hilberta, $-A : D(A) \subset \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ domkniętym, dodatnio określonym, samosprzężonym operatorem generującym C_0-półgrupę. B_α jest operatorem różniczkowym rzędu pierwszego.

Badanie równania (1) jest istotne między innymi z uwagi na zastosowanie w zagadnieniu sterowania optymalnego stochastycznego równania dyfuzji. Niech $D\subset\mathbb{R}^d$, $d\le 3$, będzie ograniczonym obszarem o gładkim brzegu oraz niech będzie dane nastepujące stochastyczne równanie dyfuzji ze sterowaniem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial s}(t,\xi) = \Delta_\xi(t,\xi) + (\alpha(t,\xi)\cdot\nabla_\xi)x(t,\xi)\dot{W}_Q(t,\xi) \\ x(0,\xi) = x_0,\ (t,\xi)\in[0,T]\times D, \end{cases} \tag{2}$$

gdzie W_Q jest procesem Wienera o kowariancji Q, natomiast $\alpha : \Omega\times[0,T]\to U$ jest sterowaniem adaptowanym do procesu Wienera, o wartościach w pewnej przestrzeni metrycznej U. Powyższe równanie opisuje proces dyfuzji w sterowanym, zaburzonym losowo polu unoszenia. Mamy więc równanie stochastyczne z multyplikatywnym szumem zależnym od gradientu funkcji poszukiwanej, gdzie dodatkowo sterowanie $\alpha(t,\xi)$ stoi przy gradiencie funkcji poszukiwanej $\nabla x(t,\xi)$. Są to dwa główne czynniki będące istotnym źródłem trudności, jak również decydujące o oryginalności pracy.

Dla dalszych celów zapiszmy powyższe równanie w abstrakcyjnej formie. Zdefiniujmy $Ax = -\Delta x$ oraz $B_\alpha x = (a\cdot\nabla)x$. Niech dana będzie przestrzeń probabilistyczna z filtracją $(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge t_0}\},\boldsymbol{P})$, na której jest zdefiniowany proces Wienera $W(t)$ o wartościach w $\boldsymbol{H}$ i kowariancji Q. Rozważamy rodzinę problemów sterowania odpowiadającą (2)

$$\begin{cases} dX(s) = -AX(s)\,dt + B_{\alpha(s)}X(s))\,dW(s) \quad \text{w } (t,T]\times H \\ X(t) = x\in H. \end{cases} \tag{3}$$

Dla ustalonej chwili początkowej t oznaczmy przez $\mathcal{U}_t$ zbiór sterowań dopuszczalnych. Sterowanie optymalne polega na minimalizacji względem wszystkich $\alpha(\cdot)\in\mathcal{U}_t$

funkcjonału kosztu

$$J(t,x,a(\cdot)) = \mathbb{E}\Big\{\int_t^T l(s,X(s),a(s)) + g(X(T))\Big\}.$$

W metodzie programowania dynamicznego oczekuje się, że funkcja wartości

$$\mathcal{V}(t,x) = \inf_{a(\cdot)\in\mathcal{U}_t} J(t,x,a(\cdot))$$

jest rozwiązaniem równania (1). Równanie to należy do szerszej klasy nieskończeniewymiarowych równań Hamiltona-Bellmana-Jacobiego

$$\begin{cases} u_t(t,x) + \langle Ax, Du(t,x)\rangle + \mathcal{H}(x, D^2u(t,x)) = 0 \\ u(T,x) = g(x) \quad \text{dla } (t,x) \in (0,T)\times \boldsymbol{H}. \end{cases}$$

Ponieważ jednak funkcja wartości $\mathcal{V}(t,x)$ na ogół nie jest klasy $C^{1,2}$, a zatem nie może w sposób klasyczny spełniać równania (1), poszukuje się ogólniejszych rozwiązań lepkościowych. W przedstawianym referacie interesuje nas, czy równanie (1) posiada jednoznaczne lepkościowe rozwiązanie, a jeżeli tak, to czy funkcja wartości spełnia je w sensie lepkościowym.