Bronisław Jakubczyk
Instytut Matematyczny PAN, Warszawa

Rozwinięcia Magnusa w równaniach różniczkowych i sterowanie

W roku 1954 Wilhelm Magnus wprowadził nową metodę rozwiązywania nieautonomicznych układów równań różniczkowych zwyczajnych

$$\dot{x} = A(t)\,x, \quad x(t) \in \mathbb{R}^n.$$

Metoda ta używa komutatora macierzy $[A, B] = AB - BA$ jako podstawowego narzędzia i pozwala na geometryczną analizę rozwiązań oraz na opracowanie przybliżonych metod rozwiązań zachowujących podstawowe cechy geometryczne rozwiązań ścisłych. W skrócie, rozwiązanie przedstawia się w postaci $x(t) = \exp(\Omega(t))x_0$, gdzie macierz $\Omega(t)$ jest szeregiem Magnusa

$$\int_0^t A(s)\,ds + \frac{1}{2}\int_0^t \int_0^{s_1} [A(s_1), A(s_2)]\,ds_2\,ds_1 + \dots\ .$$

Składnik z podwójną całką i komutatorem macierzy $[A(s_1), A(s_2)]$ oraz składniki wyższych rzędów z wielokrotnymi komutatorami pozwalają na analizę własności rozwiązań równań, często bez ich rozwiązywania.

W wykładzie nakreślimy, jak funkcje exp oraz log nieprzemiennych zmiennych są użyteczne w analizie równań różniczkowych. Przedstawimy niektóre zastosowania rozwinięć Magnusa oraz ich uogólnień do układów nieliniowych. W szczególności, układy tego typu powstają dla tzw. biliniowych układów sterowania

$$\dot{x} = \left(A + \sum_{j=1}^{m} u_j(t) B_j\right) x, \quad x(t) \in \mathbb{R}^n,$$

gdzie $u_1(t), \dots, u_m(t)$ są składowymi sterowania. Typowe przykłady takich układów sterowania pojawiają się w mechanice kwantowej i są opisywane równaniem Schrödingera

$$i\,\frac{dx}{dt} = \left(H_0 + \sum_{j=1}^{m} u_j(t) H_j\right) x, \quad x(t) \in \mathbb{C}^n,$$

gdzie przestrzeń rzeczywistą $\mathbb{R}^n$ zamienia się na przestrzeń zespoloną $\mathbb{C}^n$ lub na nieskończeniewymiarową przestrzeń Hilberta, a operatory (macierze) samosprzężone $H_0, \dots, H_m$, zwane Hamiltonianami, opisują układ fizyczny. Przedstawimy w skrócie, jak w technice jądrowego rezonansu magnetycznego (używanego w chemii oraz medycynie) wykorzystuje się rozwinięcia Magnusa, by zaprojektować odpowiednie sterowanie spinów jąder atomowych. Wspomnimy o metodach numerycznych dających rozwiązania przybliżone mające cechy rozwiązań ścisłych jak np. zachowywanie energii, pozostawanie rozwiązań w określonej grupie Liego (np. grupie obrotów czy symplektyczność rozwiązań).

W końcowej części referatu pokażemy, jak powyższy formalizm uogólnić do układów nieliniowych, zastępując komutator macierzy komutatorem pól wektorowych (nawiasem Liego). Na przykładzie samochodu z przyczepkami pokażemy, jak tutaj działa nawias Liego.