dr Jan Koroński
Politechnika Krakowska, Wydział Fizyki, Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyki

Rozwiązanie uogólnione dla równania parabolicznego w przestrzeni nieskończeniewymiarowej

Przedmiotem rozważań jest definicja rozwiązania uogólnionego dla równania parabolicznego w przestrzeni nieskończeniewymiarowej $D = \mathbb{R}^\infty \times (0, T)$ postaci

$$\left[\sum_{i=1}^{\infty} D_{x_i}^2 - D_t\right] u(x,t) = \prod_{i=1}^{\infty} f_i(x_i, t), \quad x = (x_1, x_2, \ldots) \in \mathbb{R}^\infty, \tag{1}$$

w obszarze

$$D = \{(x,t) : x_i \in (-\infty, \infty), \quad i = 1, 2, \ldots, \quad t \in (0, T), \quad T < \infty\},$$

spełniającego warunek początkowy

$$u(x, 0) = \prod_{i=1}^{\infty} h_i(x_i), \quad x_i \in (-\infty, \infty), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

i warunek brzegowy

$$u(x,t) = 0 \quad \text{dla } x_i \to \infty, \quad i = 1, 2, \ldots, \quad t \in (0, T), \tag{3}$$

gdzie funkcje f_i i h_i są dane, natomiast funkcja u jest szukana. Zakładamy, że $u \in L^2(D)$, $\prod_{i=1}^{\infty} f_i \in L^2(D)$ oraz $\prod_{i=1}^{\infty} h_i \in L^2(\mathbb{R}^\infty)$.

W pracach [1] i [2] skonstruowano klasyczne rozwiązanie jednorodnego oraz niejednorodnego zagadnienia początkowego Cauchy'ego dla rozważanego równania parabolicznego w przestrzeni nieskończeniewymiarowej $D = \mathbb{R}^\infty \times (0, T)$. Problem niejednorodny polega na wyznaczeniu funkcji u spełniającej równanie

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} D_{x_i}^2 - D_t\right) u(x,t) = \prod_{i=1}^{\infty} \xi_i(x_i, t), \quad x = (x_1, x_2, \ldots) \in \mathbb{R}^\infty, \tag{4}$$

w obszarze

$$D = \{(x,t) : x_i \in (-\infty, \infty), \quad i = 1, 2, \ldots, \quad t \in (0, T),\ T < \infty\}$$

i spełniającej następujący warunek początkowy

$$u(x, 0) = \prod_{i=1}^{\infty} h_i(x_i), \quad x_i \in (-\infty, \infty),\ i = 1, 2, \ldots. \tag{5}$$

W [2] pokazano, że rozwiązanie zagadnienia (4)–(5) jest postaci

$$u(x,t) = \prod_{i=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_i(y_i) U_i(x_i, t; y_i, 0)\, dy_i + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^\infty} \prod_{i=1}^{\infty} \xi_i(y_i, s) U_i(x_i, t; y_i, s)\, dy_i\, ds, \tag{6}$$

$$x = (x_1, x_2, \ldots) \in \mathbb{R}^\infty, \quad t \in (0, T),$$

$$U_i(x_i, t; y_i, s) = (t-s)^{-1/2} \exp(B(t,s)(x_i - y_i)^2), \quad B(t,s) = (-4(t-s))^{-1}.$$

Pierwszy składnik sumy (6), czyli funkcja

$$u(x,t) = \prod_{i=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_i(y_i) U_i(x_i, t; y_i, 0)\, dy_i,$$

jest rozwiązaniem [1] jednorodnego równania parabolicznego

$$\left[\sum_{i=1}^{\infty} D_{x_i}^2 - D_t\right] u(x,t) = 0, \quad x = (x_1, x_2, \ldots) \in \mathbb{R}^{\infty},$$

w obszarze D, spełniającego warunek początkowy typu Cauchy'ego (2).

W pracy [3] skonstruowano rozwiązanie tzw. problemu odwrotnego dla równania (1), gdy prawa strona równania (1) nie jest całkowicie znana, przy spełnieniu przez rozwiązanie warunku początkowego typu Cauchy'ego (2) i pewnego dodatkowego warunku kontrolnego (warunku sterowania).

Rozwiązanie uogólnione zagadnienia początkowo-brzegowego (1)–(3) definiujemy poprzez pewną tożsamość całkową. Mianowicie rozważmy następujące przestrzenie:

Przestrzeń

$$H_{\infty}^{0,1}(D) = \Big\{ u \in L^2(D) : \text{ istnieją pochodne uogólnione } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(D),\ i = 1, 2, \ldots \Big\}.$$

Przestrzeń

$$H_{\infty}^{1}(D) = \Big\{ u \in H_{\infty}^{0,1}(D) : \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(D) \Big\}.$$

Iloczyn skalarny w przestrzeni $H_{\infty}^{0,1}(D)$

$$u, v \in H_{\infty}^{0,1}(D) : \quad (u,v)_{H_{\infty}^{0,1}(D)} \stackrel{\text{def}}{=} \int_D uv\, dx\, dt + \int_D \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx\, dt.$$

Drugi składnik prawej strony powyższej równości jest iloczynem skalarnym w przestrzeni $H_{\infty}^{1}(D)$, a pierwszy w przestrzeni $L^2(D)$.

Definicja rozwiązania uogólnionego problemu granicznego (1)–(3)

Funkcję $u \in H_{\infty}^{0,1}(D)$ nazywamy uogólnionym rozwiązaniem problemu granicznego (1), (2), (3) z $\prod_{i=1}^{\infty} h_i \in L^2(\mathbb{R}^{\infty})$ i funkcją $\prod_{i=1}^{\infty} f_i \in L^2(D)$ wtedy i tylko wtedy, gdy u spełnia warunek brzegowy (3) oraz tożsamość

$$\int_D \left(-u \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx\, dt = \int_{\mathbb{R}^{\infty}} \prod_{i=1}^{\infty} h_i v(x,0)\, dx + \int_D \prod_{i=1}^{\infty} f_i v\, dx\, dt \quad \forall v \in H_{\infty}^{1}(D),$$

przy czym funkcja v spełnia warunki:

$$v(x,T) = 0 \text{ oraz } v(x,t) = 0 \text{ dla } x_i \to \infty, \quad i = 1, 2, \ldots, \quad t \in (0,T).$$

Można udowodnić twierdzenia o istnieniu i o jednoznaczności rozwiązania problemu granicznego (1)–(3).

Literatura

[1] J. Koroński, *Parabolic problem in the space*, Commentationes Mathematicae XLIV:1 (2004), 301–306.
[2] J. Koroński, *Nonhomogeneous parabolic problem in the space* $\mathbb{R}^{\infty}$, Fasciculi Mathematici 38 (2007), 41–45.
[3] J. Koroński, *Problem odwrotny dla równania parabolicznego w przestrzeni nieskończenie wymiarowej*, Czasopismo Techniczne, 1-NP/2009, Zeszyt 8, 77–84.