prof. dr hab. Jerzy Zabczyk
Instytut Matematyczny PAN

O równaniu Heatha–Jarrowa–Mortona rynku obligacji

Referat oparty jest na wspólnej z M. Baranem pracy [1] i dotyczy modelu rynku obligacji zaproponowanego przez Heatha, Jarrowa i Mortona (model HJM) w pracy [2].

Niech $P(t,T)$, $0 \le t \le T \le T^*$, oznacza rynkową cenę w chwili t obligacji, która daje posiadaczowi w chwili T wypłatę 1. W modelu HJM zakłada się, że

$$P(t,T) = \exp\Big(-\int_t^T f(t,u)\,du\Big), \quad 0 \le t \le T \le T^*,$$

gdzie $f(t,u)$, $0 \le t \le u \le T$, to tak zwana oczekiwana stopa procentowa (*forward rate*). Heath, Jarrow i Morton założyli, że przewidywana stopa procentowa jest zadana w postaci Ito:

$$f(t,T) = f(0,T) + \int_0^t \alpha(s,T)\,ds + \int_0^t \sigma(s,T)\,dL(s), \tag{1}$$

gdzie L jest procesem Wienera. Z założenia, że model nie może generować zysków bez ryzyka, otrzymali oni następującą zależność (wzór HJM) wiążącą α ze zmiennością (*volatility*) σ:

$$\alpha(t,T) = J'\Big(\int_t^T \sigma(t,u)\,du\Big)\sigma(t,T), \quad 0 \le t \le T \le T^*, \tag{2}$$

gdzie

$$J(x) = \frac{1}{2}\,qx^2, \quad x \in \mathbb{R},$$

a q to stała nieujemna. Wtedy zależność (1) ma postać

$$df(t,T) = J'\Big(\int_t^T \sigma(t,u)\,du\Big)\sigma(t,T)\,dt + \sigma(t,T)\,dL(t). \tag{3}$$

Równość (3), w której σ jest ustalonym funkcjonałem oczekiwanej stopy procentowej f, nazywa się równaniem Heatha–Jarrowa–Mortona. W pracy doktorskiej [3] z roku 1989 Morton wykazał, że jeżeli żądać dodatkowo, by zmienność σ była liniową funkcją oczekiwanej stopy procentowej f:

$$\sigma(t,T) = \lambda(t,T)f(t,T) \tag{4}$$

(λ — ustalona funkcja deterministyczna), to równanie (3) ma tylko rozwiązanie eksplodujące. Dlatego modele HJM z liniową funkcją σ, mimo że bardzo atrakcyjne, zostały zarzucone.

W referacie rozpatrzymy uogólnienie modelu HJM, żądając jedynie, by proces L miał niezależne przyrosty (proces Lévy'ego). Wtedy w równości (2) pojawia się bardziej złożona funkcja

$$J(x) = -ax + \frac{1}{2}\, qx^2 + \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-xy} - 1 + xy\mathbb{1}_{(-1,1)}(y))\, \nu(dy),$$

gdzie $a \in \mathbb{R}$, $q \geq 0$, a ν jest miarą. Okazuje się, że dla stosunkowo szerokiej klasy procesów L równanie (3), w którym σ jest postaci (4), ma rozwiązania nieeksplodujące. W pracy [1] podane są warunki na α, σ, ν, bliskie warunkom koniecznym i dostatecznym, by istniały rozwiązania nieeksplodujące.

Bibliografia

[1] M. Baran, J. Zabczyk, *Forward rate models with linear volatilities*, Finance and Stochastics, przyjęta do druku.

[2] D. Heath, R. Jarrow, A. Morton, *Bond pricing and the term structure of interest rates: a new methodology for contingent claim valuation*, Econometrica 60 (1992), 77–105.

[3] A. Morton, *Arbitrage and martingales*, Dissertation, Cornell University, 1989.