*prof. dr hab. Piotr Jaworski*
*Uniwersytet Warszawski*
*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki*

# O koherentności VaR-u jako miary ryzyka kursowego

Rozważamy portfel walutowy złożony z $d$ różnych walut. Oznaczmy przez $S_{i,0}$ i $S_{i,1}$ kurs $i$-tej waluty na początku i na końcu okresu inwestycyjnego, a przez $s_i$ iloraz kursów

$$s_i = \frac{S_{i,1}}{S_{i,0}}.$$

$S_{i,0}$ są znane w momencie rozpoczęcia inwestycji, a $S_{i,1}$ i $s_i$ modelujemy jako zmienne losowe.

Przyjmujemy następujące założenia modelowe, które są dość bliskie empirycznym rozkładom kursów walutowych.

- Łączny rozkład $s_i$ jest ciągły i jest opisany przez kopulę $C$ posiadającą jednorodny dolny ogon. Dla $q = (q_1, \ldots, q_d)$ takich, że $0 \leq q_i \leq \delta$, $C(q) = L(q)$, gdzie $L$ — pewna niezerowa dodatnio jednorodna funkcja ($\forall t > 0 \quad L(tq) = tL(q)$).
- Dla $i \in \{1, \ldots, d\}$ odwrotność dystrybuanty $s_i$ $\frac{1}{F_i(s)}$ ograniczona do $s \in (0, F_i^{-1}(\delta))$ jest wypukła.

Niech $W_0$ i $W_1(w)$ oznaczają odpowiednio wartość portfela na początku i na końcu okresu inwestycyjnego, a $w = (w_1, \ldots, w_d)$ skład „procentowy" portfela, $\sum w_i = 1$, $\forall i \ \ w_i > 0$.

$$W_1(w) = W_0 \cdot (w_1 s_1 + \ldots + w_d s_d).$$

Portfele jednoskładnikowe odpowiadają wektorom $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$.

VaR (Value at Risk, wartość narażona na ryzyko) dla poziomu ufności $1 - \alpha$ jest wyznaczony przez warunek

$$P(W_0 - W_1(w) \leq \mathrm{VaR}_{1-\alpha}(w)) = 1 - \alpha$$

tzn. z prawdopodobieństwem $1 - \alpha$ strata nie przekroczy $\mathrm{VaR}_{1-\alpha}$.

**Twierdzenie.** *Dla nieujemnych $\alpha$ takich, że*

$$\sum_{i=1}^{d} w_i F_i^{-1}(\alpha) \leq \min\{w_j F_j^{-1}(\delta) : j = 1, \ldots, d\}$$

*zachodzi nierówność*

$$\mathrm{VaR}_{1-\alpha}(w) \leq w_1 \mathrm{VaR}_{1-\alpha}(e_1) + \ldots + w_d \mathrm{VaR}_{1-\alpha}(e_d).$$