mgr Dominika Klimek
Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej
Wydział Ekonomiczny, Zakład Zastosowań Matematyki
E-mail: `dominika@hektor.umcs.lublin.pl`
mgr Andrzej Michalski
Katolicki Uniwersytet Lubelski Jana Pawła II
Wydział Matematyczno-Przyrodniczy, Katedra Analizy Zespolonej
E-mail: `amichal@kul.lublin.pl`

Różnowartościowe odwzorowania harmoniczne z dylatacją zadaną w terminach pewnych funkcji hipergeometrycznych

Niech ϕ_n będzie konforemnym odwzorowaniem koła jednostkowego na wypukły wielokąt foremny o n wierzchołkach, $n = 3, 4, 5, \ldots$. Znana jest reprezentacja takiego odwzorowania za pomocą wzorów Schwarza-Christoffela

$$\phi_n(z) = \int_0^z (1 - \zeta^n)^{-2/n}\, d\zeta\,.$$

W pewnych sytuacjach okazuje się, że wygodnie jest zapisać ϕ_n za pomocą funkcji hipergeometrycznej

$$\phi_n(z) = z\,{}_2F_1\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}; 1 + \frac{1}{n}; z^n\right).$$

K. Driver i P. Duren w [2] rozważali problem różnowartościowych odwzorowań harmonicznych generowanych przez ϕ_n z dylatacją z^k dla stosownie dobranych $k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. Uzyskane przez siebie wyniki autorzy opisali właśnie w terminach funkcji hipergeometrycznych, co umożliwiło im stosunkowo łatwe ilustrowanie graficzne obrazów tych odwzorowań przy użyciu komputera.

Ponieważ odwzorowanie ϕ_n jest analityczne i ograniczone, możemy rozważać różnowartościowe odwzorowania harmoniczne generowane przez odwzorowania konforemne z odpowiednio unormowanym ϕ_n^k jako dylatacją dla pewnych $k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. Dodatkową motywacją do prowadzenia takich rozważań jest fakt, że ciąg $\{\phi_n\}$ dąży do identyczności, która gra szczególną rolę w zbiorze wszystkich możliwych dylatacji.

Wzorując się na pracy [2], my również używamy funkcji hipergeometrycznych do reprezentacji otrzymanych wyników. Taki zapis pozwala nam przedstawiać obrazy uzyskanych odwzorowań w formie graficznej, co ilustrujemy wybranymi przykładami. To, co odróżnia naszą pracę od [2], to między innymi zmodyfikowana metoda konstrukcji oparta na wynikach zaczerpniętych z [1].

Literatura

[1] J. G. Clunie, T. Sheil-Small, *Harmonic Univalent Functions*, Annales Academiae Scientarium Fennicae Series A I. Mathematica 9 (1984), 3–25.
[2] K. Driver, P. L. Duren, *Harmonic shears of regular polygons by hypergeometric functions*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 239 (1999), 72–84.