Margareta Wiciak
Politechnika Krakowska
Instytut Matematyki

Problem mnożenia w dystrybucyjnym równaniu belki z przegubem

Niech $\mathcal{D}(\Omega)$ oznacza przestrzeń funkcji próbnych, tj. funkcji klasy $\mathcal{C}^\infty$ o nośniku zawartym w zbiorze otwartym $\Omega \subset \mathbb{R}$. Przez $\mathcal{D}'(\Omega)$ oznaczmy przestrzeń dystrybucji, czyli odwzorowań liniowych ciągłych $\mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$. Dla funkcji f klasy $\mathcal{C}^\infty$ i dystrybucji $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ iloczyn fT definiujemy jako dystrybucję daną wzorem $(fT)(\varphi) = T(f\varphi)$ dla $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Jeśli rząd dystrybucji T nie przekracza k, to powyższa definicja iloczynu przedłuża się w naturalny sposób na funkcje f klasy $\mathcal{C}^k$. Na przykład, dla funkcji f, ciągłej w Ω

$$f[u] = [uf], \quad f\delta_0 = f(0)\delta_0,$$

gdzie $[u]$ oznacza dystrybucję regularną generowaną przez funkcję lokalnie sumowalną u, tzn. $[u](\varphi) = \int_{\mathbb{R}} u(x)\varphi(x)dx$, zaś δ_0 — dystrybucję Diraca, $\delta_0(\varphi) = \varphi(0)$ dla $\varphi \in \mathcal{D}$. Sensowny jest także iloczyn niektórych funkcji nieciągłych i dystrybucji, na przykład

$$H\delta_0 = \frac{1}{2}\delta_0,$$

gdy H jest funkcją Heaviside'a. W dalszym ciągu można pytać o iloczyn $S \cdot T$, gdy $S, T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Możliwe są różne sposoby rozumienia takiego iloczynu: mnożenie w algebrze Colombeau [1], α-produkt [4], podejście przez analizę niestandardową [2].

Jak wiadomo, równanie drgań poprzecznych belki jest postaci

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\alpha(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + \mu\alpha(x)\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}(t,x)\right) + \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = f(t,x), \tag{1}$$

gdzie $\alpha \in \mathcal{C}^2(0,l)$, μ jest stałą, która charakteryzuje tłumienie, ρF oznacza masę na jednostkę długości, zaś f rozkład sił zewnętrznych oddziałujących na belkę długości l. Rozważamy belkę jednorodną z przegubem w punkcie $x_0 \in (0,l)$. Wtedy

$$\alpha(x) = \begin{cases} \alpha_0 = EI & \text{dla } x \in [0,l] \setminus \{x_0\}, \\ 0 & \text{dla } x = x_0. \end{cases}$$

Tego typu zagadnienia można rozwiązywać klasycznie, tj. dzieląc belkę na odcinki $(0,x_0)$, (x_0,l) i uwzględniając warunek zgodności

$$\frac{\partial^3}{\partial t \partial x^2} u(t, x_0^+) = \frac{\partial^3}{\partial t \partial x^2} u(t, x_0^-) = 0.$$

W referacie przedstawimy inne podejście. Będziemy szukać rozwiązań dystrybucyjnych. W tej sytuacji należy nadać sens iloczynowi $\alpha(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Problem mnożenia dystrybucji pojawia się również przy rozwiązywaniu problemu brzegowego skojarzonego z (1).

Literatura

[1] J. F. Colombeau, *An Elementary Introduction to New Generalized Functions*, North-Holland, 1985.
[2] Li Bang-He, *Non-standard analysis and multiplication of distributions*, Scientia Sinica XXI (1978), 561–585.
[3] S. Kasprzyk, M. Wiciak, *Differential equation of transverse vibrations of a beam with local stroke change of stiffness*, w przygotowaniu.
[4] C. O. R. Sarrico, *About a family of distributional products important in the applications*, Portugaliae Math. 45 (1988), 295–316.