Antoni Leon Dawidowicz
Uniwersytet Jagielloński
Anna Poskrobko
Politechnika Białostocka

Model populacji ze strukturą wieku i opóźnieniem

Pierwszy model populacji uwzględniający rozkład wiekowy zaproponowany został po raz pierwszy przez A. G. McKendricka w 1926 roku. Opisał on jednopłciową populację, w której każdy osobnik jest zdolny do rozmnażania. Jest tzw. klasyczny model von Foerstera oparty na systemie równań

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = -\lambda(x,t)u \\ u(x,0) = v(x) \\ u(0,t) = \displaystyle\int_0^\infty \beta(x,t)u(x,t)\,dx. \end{cases}$$

Powyższy układ można na różne sposoby uogólnić. Przykładem może być model zaproponowany przez M. E. Gurtina i R. C. MacCamy'ego w roku 1974 oparty na założeniu, że śmiertelność i zdolności prokreacyjne zależą od liczebności całej populacji. Model, jaki zostanie przedstawiony, jest uogólnieniem wyników Gurtina i MacCamy'ego. Uogólnienie polega na wprowadzeniu opóźnienia. Wiadome jest, że nie tylko ograniczoność zasobów środowiska, czy liczebność samej populacji mogą mieć istotny wpływ na dalszy jej rozwój. Istnieją także inne czynniki, takie jak na przykład: okres ciąży czy okres oczekiwania na odpowiedź systemu (układu) na bodziec zewnętrzny. Przykłady te sugerują rozważenie opisu z parametrem opóźnienia. Wprowadzenie opóźnienia jest raczej naturalnym założeniem w modelach biologicznych. W naszym modelu współczynniki rozrodczości i śmiertelności zależą od wielkości populacji w pewnym poprzedzającym okresie czasu.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = -\lambda(x,z_t)u(x,t) \\ u(x,0) = v(x) \\ u(0,t) = \displaystyle\int_0^\infty \beta(x,z_t)u(x,t)\,dx \\ z(t) = \displaystyle\int_0^\infty u(x,t)\,dx \\ z_t = z(t+s). \end{cases}$$

Przedstawione zostaną podstawowe własności tak skonstruowanego modelu.