mgr Agnieszka Dyki
Politechnika Gdańska
Katedra Równań Różniczkowych i Zastosowań Matematyki

Zagadnienia brzegowe dla równań różniczkowych z wyprzedzonymi argumentami

W komunikacie zamierzam rozważyć zagadnienie brzegowe postaci

$$(1) \qquad \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x(\alpha(t)), x(t), x(\beta(t))) \equiv F(x,x)(t), & t \in J = [0,T], \\ \quad 0 = g(x(0), x(T)), \end{cases}$$

gdzie $f \in C(J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $g \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\alpha, \beta \in C(J,J)$, $t \le \alpha(t) \le T$, $t \le \beta(t) \le T$ na J oraz

$$F(x,y)(t) = f(t, x(t), x(\alpha(t)), y(t), y(\beta(t))).$$

Przedstawię warunki wystarczające dla istnienia rozwiązań powyższego zagadnienia. Zacznę od sformułowania warunków gwarantujących istnienie quasirozwiązań zagadnienia (1), tzn. pary (y,z) funkcji klasy C^1, spełniających układ

$$\begin{cases} y'(t) = F(y,z)(t), \quad t \in J, \quad g(z(0), y(T)) = 0, \\ z'(t) = F(z,y)(t), \quad t \in J, \quad g(y(0), z(T)) = 0. \end{cases}$$

Funkcja f spełnia jednostronny warunek Lipschitza względem drugiej i trzeciej zmiennej oraz jest niemalejąca względem dwóch ostatnich zmiennych.

Następnie podam warunki dostateczne dla istnienia dokładnie jednego rozwiązania zagadnienia (1) w sektorze $[z_0, y_0]_* = \{w \in C^1(J, \mathbb{R}) : z_0(t) \le w(t) \le y_0(t),\ t \in J\}$, gdzie $y_0, z_0 \in C^1(J, \mathbb{R})$ są odpowiednio rozwiązaniem dolnym i górnym zagadnienia (1), czyli

$$\begin{cases} y_0'(t) \le F(y_0, z_0)(t), \quad t \in J, \quad g(z_0(0), y_0(T)) \le 0 \\ z_0'(t) \ge F(z_0, y_0)(t), \quad t \in J, \quad g(y_0(0), z_0(T)) \ge 0. \end{cases}$$

W celu uzyskania wyników wykorzystam metodę iteracji monotonicznych oraz nierówności różniczkowe.

Przytoczę także przykład ilustrujący otrzymane wyniki.