dr Renata Bujakiewicz-Korońska
Instytut Fizyki Akademii Pedagogicznej w Krakowie
dr Jan Koroński
Instytut Matematyki Politechniki Krakowskiej

Liniowe i nieliniowe zagadnienia brzegowe dla równań poliharmonicznych

Niech D oznacza jednospójny i ograniczony obszar $D \subset \mathbb{R}^n$ z brzegiem ∂D klasy C^1. Rozważmy niejednorodne równania poliharmoniczne [1] postaci

$$\Delta^n u(X) = f(X), \qquad X = (x_1, \ldots, x_n), \tag{1}$$

$$\Delta^n u(X) = f(X, \Delta^{n-1} u(X)) \quad \text{dla } X \in D \tag{1a}$$

i następujące warunki brzegowe:

$$\Delta^i u(X) = f_i(X) \quad \text{dla } X \in \partial D,\ i = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{2}$$

W prezentowanej pracy [1] konstruujemy rozwiązania problemów (1)–(2), (1a)–(2), stosując odpowiednią funkcję Greena i w przypadku problemu (1a)–(2) odpowiednie nieliniowe równanie całkowe, oraz dowodzimy twierdzenia o istnieniu i o jednoznaczności rozwiązań rozważanych zagadnień brzegowych.

Powyższe równania, gdy $f \equiv 0$ i dla $n = 2$, sprowadzają się do wyznaczenia rozkładu przemieszczeń i naprężeń w obszarze D ośrodka sprężystego, gdy dane są albo przemieszczenia płaskie, albo naprężenia w każdym punkcie P na brzegu ∂D obszaru D.

Z teorii sprężystości wiadomo [2], że gdy

$$\begin{Bmatrix} t_{xx}, & t_{xy} \\ t_{yx}, & t_{yy} \end{Bmatrix}$$

$(t_{xy} = t_{yx})$ jest tensorem naprężeń w punkcie (x, y) w zagadnieniu płaskim, to składowe tego tensora spełniają związki różniczkowe

$$\frac{\partial t_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial t_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yy}}{\partial y} = 0, \tag{3}$$

$$t_{xx} = \lambda\Big(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\Big) + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x}\,, \quad t_{xy} = \mu\Big(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\Big), \tag{4}$$

$$t_{yy} = \lambda\Big(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\Big) + 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y},$$

w których λ, μ oznaczają współczynniki Lame'go, u_x i u_y zaś są składowymi przemieszczenia płaskiego w punkcie (x, y). Z równań (3) widzimy, przy założeniu ciągłości pochodnych, że składowe tensora naprężeń w danym obszarze jednospójnym D powinny się wyrazić jako pochodne

$$t_{xx} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad t_{xy} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad t_{xy} = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad t_{yy} = -\frac{\partial w}{\partial x}$$

pewnych funkcji v, w. Ponieważ powinno jednak być $\partial v/\partial x + \partial w/\partial y = 0$, więc ostatecznie składowe tensora naprężeń można wyrazić przez jedną funkcję $W(x,y)$ w następujący sposób:

$$t_{xx} = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\,, \qquad t_{xy} = -\frac{\partial W}{\partial x \partial y}\,, \qquad t_{yy} = -\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\,. \tag{5}$$

Funkcja $W(x,y)$ nazywa się *funkcją Airy'ego*.

Podstawiając wyrażenia (5) do wzorów (4) i rugując składowe u_x, u_y wnioskujemy, że funkcja Airy'ego spełnia w obszarze D równanie biharmoniczne

$$\Delta(\Delta W) = \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = 0.$$

Jeśli dane są składowe naprężeń $X(P), Y(P)$ działających na brzegu ∂D obszaru D, to w każdym punkcie P tego brzegu mamy związki

$$t_{xx}\cos(N,x) + t_{xy}\cos(N,y) = X(P), \quad t_{xy}\cos(N,x) + t_{yy}\cos(N,y) = Y(P), \tag{6}$$

w których (N,x) i (N,y) oznaczają kąty między normalną zewnętrzną w punkcie P i osiami współrzędnych.

Mamy oczywiście

$$\cos(N,x) = \frac{dy}{ds}\,, \qquad \cos(N,y) = -\frac{dx}{ds}\,,$$

gdzie s oznacza współrzędną krzywoliniową punktu P. Ze wzorów (4) i (6) wynika, że funkcja Airy'ego powinna spełniać związki brzegowe

$$\frac{d}{ds}\Big(\frac{\partial W}{\partial y}\Big)_P = X(P), \qquad \frac{d}{ds}\Big(\frac{\partial W}{\partial x}\Big)_P = -Y(P),$$

skąd mamy na brzegu ∂D warunki

$$\Big(\frac{\partial W}{\partial x}\Big)_P = -\int_0^s Y(\sigma)\,d\sigma + C_1, \qquad \Big(\frac{\partial W}{\partial y}\Big)_P = +\int_0^s X(\sigma)\,d\sigma + C_2, \tag{7}$$

w których C_1, C_2 są stałymi dowolnymi.

Wyznaczenie rozkładu naprężeń w obszarze D ośrodka sprężystego, gdy dane są siły działające na brzegu ∂D, sprowadza się więc do wyznaczenia funkcji biharmonicznej $W(x,y)$ w obszarze D spełniającej warunki brzegowe (7). Warunki te można sprowadzić do następujących warunków brzegowych:

$$u(P) = h(P), \qquad \frac{du(P)}{dN} = g(P) \text{ dla } P \in \partial D, \tag{8}$$

przy czym funkcje g i h są określone i ciągłe na brzegu ∂D.

Gdy na płytę sprężystą D, ograniczoną brzegiem ∂D, działają wyłącznie siły do niej prostopadłe o mierze f na jednostkę pola, to miara przemieszczenia u, prostopadłego do płyty w każdym punkcie, spełnia w stanie równowagi równanie niejednorodne

$$\Delta(\Delta u) = f. \tag{9}$$

Zagadnienie z warunkami brzegowymi (8) dla równania (9) ma więc sens fizyczny poszukiwania odchylenia u płyty w stanie równowagi pod działaniem sił prostopadłych.

W szczególności jednorodne warunki brzegowe

$$u(P) = 0, \qquad \frac{du(P)}{dN} = 0$$

oznaczają, że płyta jest na brzegu zamocowana (np. wpuszczona w mur).

W rozważanych problemach brzegowych (1)–(2) i (1a)–(2) występują warunki brzegowe (2) typu Riquiera w kontekście równania poliharmonicznego (w szczególności dla $n = 2$ równanie (1) lub (1a) jest niejednorodnym liniowym, bądź nieliniowym równaniem biharmonicznym odpowiednio), a w (8) występują warunki brzegowe typu Lauricella dostosowane do równania biharmonicznego. Wcześniej w teorii sprężystości nie rozważano zagadnień brzegowych dla niejednorodnych równań nieliniowych z warunkami brzegowymi typu Riquiera.

Literatura

[1] R. Bujakiewicz-Korońska, J. Koroński, *Linear and nonlinear boundary value problems for polyharmonic equations*, Fasc. Math. (w druku).

[2] W. Pogorzelski, *Równania całkowe i ich zastosowania*, t. IV, PWN, Warszawa 1970.