mgr Maciej Malaczewski
Uniwersytet Łódzki
Wydział Ekonomiczno-Socjologiczny
Katedra Ekonometrii

Dyskretne układy dynamiczne w analizie modeli cyklu i wzrostu

Poszukiwanie rozwiązań makroekonomicznego modelu cyklu koniunkturalnego autorstwa Goodwina, opisanego przez niego w roku 1951 [2], może być sprowadzone do rozwiązania równania różniczkowego z opóźnionym argumentem postaci:

$$y'(t) + ay(t) = b + \varepsilon\phi(y'(t-\theta)) \tag{1}$$

gdzie $a, b, \theta, \varepsilon > 0$ są stałymi, kształt funkcji ϕ jest dany. Zarówno Goodwin, jak też i późniejsi badacze (np. Allen [1]) analizę tego równania prowadzili dzięki rozwinięciu lewej strony w szereg Taylora i tym samym sprowadzeniu problemu do rozwiązania pewnego równania różniczkowego drugiego rzędu.

Podejmiemy się próby innego podejścia do analizy modelu. Łatwo zauważyć, że rozwiązania równania (1) dane są wzorem postaci

$$y(t) = \psi(0)e^{-at} - \frac{b}{a}e^{-at} + \frac{b}{a} + e^{-at}\int_0^t e^{as}\varepsilon\phi(\psi'(s-\theta))ds \tag{2}$$

gdzie funkcja $\psi : [-\theta, 0] \to \mathbb{R}$ jest warunkiem początkowym. Poprzez zadanie kształtu funkcji ψ otrzymujemy rozwiązanie na przedziale $[0, \theta]$, które to rozwiązanie może stać się wówczas warunkiem początkowym dla analogicznego równania dającego rozwiązanie na następnym przedziale o długości θ. Pozwala to na przeprowadzanie symulacji całego układu i dokonywanie obserwacji związanych z istnieniem (bądź nie) odpowiednich powtarzających się cykli o różnych długościach dla różnych zestawów parametrów. Eksperymenty symulacyjne pokazują rozmaite wyniki - zarówno istnienie cykli o długości θ, istnienie cykli o długości dwóch lub więcej θ, jak też i rozmaite zachowania wybuchowe.

Dokonujemy utożsamienia rozwiązania danego wzorem (2) z przekształceniem pomiędzy dwiema przestrzeniami funkcyjnymi, a po ich izomorficznym utożsamieniu — z odwzorowaniem przestrzeni funkcyjnej ($C^1[0, \theta]$) w siebie. To z kolei pozwala na poszukiwanie powtarzalnych cykli za pomocą metod teorii punktu stałego. Praca zawiera udowodnione twierdzenie podające warunki dostateczne na istnienie punktu stałego oraz zbieżność powyższego układu do niego.

Analogiczne metody stosujemy w badaniu rozszerzeń znanych z teorii wzrostu modeli egzogenicznych — modelu Solowa [4] oraz modelu Mankiwa-Romera-Weila [3]. Rozszerzenie modelu Solowa o wprowadzenie opóźnienia pomiędzy nakładami inwestycyjnymi a przyrostem wartości kapitału fizycznego prowadzi do równania postaci

$$k'(t) + (n + \lambda)k(t) = sf(k(t - \theta))$$

gdzie $n \in (-1; 1), \lambda \in (0; 1), s \in (0; 1), \theta > 0$ są stałymi, f jest tzw. neoklasyczną funkcją produkcji. Rozwiązanie dane jest wzorem

$$k(t) = \psi(0)e^{-(n+\lambda)t} + e^{-(n+\lambda)t} \int_0^t e^{(n+\lambda)u} sf(\psi(u - \theta))du$$

Przeprowadzone przez autora badania symulacyjne potwierdzają znane własności modelu Solowa i modelu Mankiwa-Romera-Weila. Opóźnienie procesu inwestycyjnego nie zmienia stanu równowagi gospodarki.

Literatura

[1] R. G. D. Allen, *Mathematical Economics*, Macmillan & Co. Ltd., New York 1957.

[2] R. M. Goodwin, *The Nonlinear Accelerator and the Persistence of Business Cycles*, Econometrica 19 (1951), No. 1.

[3] N. G. Mankiw, D. Romer, D. Weil, *A Contribution to the Empirics of Economic Growth*, Quarterly Journal of Economics 107 (1992), 407–437.

[4] R. Solow, *A Contribution to the Theory of Economic Growth*, Quarterly Journal of Economics 70 (1956), 65–94.