prof. dr hab. Stefan Paszkowski
Instytut Niskich Temperatur i Badań Strukturalnych PAN we Wrocławiu

Przyspieszanie zbieżności szeregów ortogonalnych

Komunikat dotyczy szeregów nieskończonych

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j f_j, \tag{S}$$

gdzie ciąg $\{f_j\}$ spełnia równanie różnicowe liniowe jednorodne rzędu drugiego postaci

$$f_j + \lambda_j f_{j+1} + \mu_j f_{j+2} = 0 \quad (j = 0, 1, \ldots) \tag{R}$$

o danych λ_j, μ_j. Równanie (R) jest w szczególności spełnione, jeśli $f_j = W_j(x)$, gdzie W_j jest j-tym wielomianem *ortogonalnym* z ustalonego ciągu (np. dla wielomianów Legendre'a P_j jest $\lambda_j = -(2j+3)x/(j+1)$, $\mu_j = (j+2)/(j+1)$), a także wtedy, gdy $f_j = \cos jx$ albo $f_j = \sin jx$, tzn. dla szeregów trygonometrycznych – *cosinusowego* albo *sinusowego* (wtedy $\lambda_j = -2\cos x$, $\mu_j = 1$).

Ważne w praktyce szeregi (S) są bardzo wolno zbieżne. Klasyczne metody (algorytmy Levina, algorytm epsilon, ...) przyspieszania ich zbieżności operują na sumach częściowych szeregu i są mało skuteczne, gdy te sumy zachowują się nieregularnie. Tak właśnie na ogół jest dla szeregów ortogonalnych, nawet o bardzo regularnych współczynnikach.

W komunikacie przedstawiono kilka metod innego typu. Dzięki (R) odjęcie od (S) dowolnej wielokrotności p_j sumy $f_j + \lambda_j f_{j+1} + \mu_j f_{j+2}$ nie zmienia sumy szeregu:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j f_j = (\alpha_1 - p_1) f_1 + (\alpha_2 - \lambda_1 p_1 - p_2) f_2 + \sum_{j=3}^{\infty} \alpha'_j f_j, \tag{T}$$

gdzie

$$\alpha'_j := \alpha_j - \mu_{j-2} p_{j-2} - \lambda_{j-1} p_{j-1} - p_j \quad (j \geqslant 3).$$

Ściślej, przekształcenie jest poprawne, gdy także nowy szereg jest zbieżny.

Metody *numeryczne* polegają na iteracyjnym przybliżaniu takich p_j, dla których wszystkie α'_j są równe 0, czyli takich, że suma szeregu ma wyrażenie skończone podane po prawej stronie (T). Ponieważ p_j o tej własności są równie regularne jak współczynniki α_j, więc w szerokiej klasie szeregów (S) taka procedura jest znacznie bardziej skuteczna od algorytmów Levina, Wenigera i Homeiera (z którymi zresztą ma pewne elementy wspólne).

Metody *analityczne* polegają na iterowaniu przekształcenia (T), przy czym w każdej iteracji dobiera się p_j tak, aby współczynniki w nowym szeregu były istotnie mniejsze niż w poprzednim. Końcowy szereg ma jakościowo lepsze własności od pierwotnego (S). Podobne postępowanie pozwala uzasadnić klasyczną metodę Eulera–Knoppa przekształcania szeregu potęgowego.