dr Bogusław Bożek
dr Wiesław Solak
dr Zbigniew Szydełko
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie
Wydział Matematyki Stosowanej

O pewnej kwadraturze typu Gregory'ego i jej zastosowaniach

Przybliżoną wartość całki $I(f) = \int_a^b f(t)\,dt$ obliczamy numerycznie za pomocą wybranej kwadratury, czyli funkcjonału liniowego postaci $Q(f) = \sum_{i=0}^{n} a_i f(t_i)$, gdzie t_i zwane węzłami należą do odcinka $[a-c, b+c]$, $c \geq 0$. Jeżeli niektóre węzły są zależne od β, czyli $t_i = t_i(\beta)$, $i \in A \subset \{0, 1, \ldots, n\}$, to jest to kwadratura z parametrem. Błędem kwadratury Q nazywamy wyrażenie $EQ(f) = I(f) - Q(f)$.

Kwadratura powstała przez dodanie do reguły trapezów członu korekcyjnego (poprawki) jest nazywana typu Gregory'ego. Taką kwadraturą jest

$$Q_{n+5}^{\beta}(f) := T_{n+1}(f) + G_n(f, \beta) \tag{1}$$

gdzie $G_n(f,\beta) = \frac{h}{24\beta}\big(-3(f_0 + f_n) + 4(f_\beta + f_{n-\beta}) - (f_{2\beta} + f_{n-2\beta})\big)$, $f_t := f(a+th)$, $h = \frac{b-a}{n}$, $T_{n+1}(f) = \frac{h}{2}(f_0 + f_n) + h\sum_{i=1}^{n-1} f_i$ jest regułą trapezów, a β parametrem.

Wielomianem charakterystycznym kwadratury Q_{n+5}^{β} będziemy nazywać wielomian $v_n(\beta) = \frac{EQ(t^4)}{\frac{1}{30}h^5} = 30\beta^3 - 20n\beta^2 + n$, a jego miejsca zerowe parametrami własnymi tej kwadratury. Prosty rachunek prowadzi do wniosku, że kwadratura (1) jest rzędu czwartego, jeśli β nie jest jej parametrem własnym, oraz rzędu szóstego dla β będącego jej parametrem własnym. W pracy [1] są zamieszczone wyniki analizy tej kwadratury przy ograniczeniu zakresu β do przedziału $(0, \frac{1}{2}]$. Obecnie przedstawimy analizę kwadratury (1) dla jej parametrów własnych oraz pokażemy zastosowanie tej kwadratury do szacowania sum szeregów liczbowych.

Literatura

[1] W. Solak, Z. Szydełko, *Quadrature rules with Gregory–Laplace end corrections*, Journal of Computational and Applied Mathematics 36 (1991), 251–253.