mgr Agnieszka Dyki
Politechnika Gdańska
Katedra Równań Różniczkowych i Zastosowań Matematyki

Zagadnienia brzegowe dla równań różniczkowych z odchylonym argumentem zależnym od nieznanego rozwiązania

Rozważmy zagadnienie brzegowe postaci

$$\begin{cases} x'(t) = f\left(t, x(\beta(t, x(t))), \displaystyle\int_0^t g(t, s, x(s))\, ds\right) \equiv F(x, x, x)(t), \quad t \in J, \\ x(0) = \lambda x(T) + k, \quad \lambda \geq 0,\ k \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1}$$

gdzie $J = [0, T]$, $f \in C(J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $g \in C(J \times J \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\beta \in C(J \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ oraz

$$F(x, y, z)(t) = f\left(t, x(\beta(t, y(t))), \int_0^t g(t, s, z(t))\, ds\right).$$

Quasirozwiązaniem zagadnienia (1) nazywamy parę (y, z) funkcji klasy C^1 spełniających układ

$$\begin{cases} y'(t) = F(z, z, z)(t), \quad t \in J, \qquad y(0) = \lambda y(T) + k, \\ z'(t) = F(y, y, y)(t), \quad t \in J, \qquad z(0) = \lambda z(T) + k. \end{cases}$$

Sformułujemy warunki gwarantujące istnienie ekstremalnych quasirozwiązań zagadnienia (1), a następnie warunki dostateczne dla istnienia dokładnie jednego rozwiązania zagadnienia (1) w sektorze $[y_0, z_0]_* = \{w \in C^1(J, \mathbb{R}) : y_0(t) \leq w(t) \leq z_0(t), t \in J\}$, gdzie $y_0, z_0 \in C^1(J, \mathbb{R})$ spełniają układ

$$\begin{cases} y_0'(t) \leq F(z_0, z_0, z_0)(t), \quad t \in J, \qquad y_0(0) \leq \lambda y_0(T) + k \\ z_0'(t) \geq F(y_0, y_0, y_0)(t), \quad t \in J, \qquad z_0(0) \geq \lambda z_0(T) + k. \end{cases}$$

W celu uzyskania wyników wykorzystamy metodę iteracji monotonicznych oraz nierówności różniczkowe.