Marek Kociński
SGGW Warszawa
E-mail: marek_kocinski@sggw.pl

Minimalizacja ryzyka dla opcji amerykańskiej na rynku z czasem dyskretnym

W trakcie wystąpienia omówione zostanie zagadnienie minimalizacji ryzyka wystawiającego opcję amerykańską w przypadku, gdy kwota uzyskana z jej sprzedaży nie wystarcza na pełne pokrycie późniejszych zobowiązań. Opcja ta reprezentowana jest przez proces wypłaty dla jej posiadacza $\{H_t, t = 0, \ldots, T\}$. Miarą ryzyka jest maksimum po momentach stopu z wartości oczekiwanej niedoboru kapitału sprzedającego wobec jego zobowiazań w danym momencie. Jest to naturalne rozszerzenie pojęcia ryzyka dla opcji europejskiej (*expected shortfall risk*). W przypadku opcji europejskiej, dla wyjściowego problemu minimalizacji, istnieje następujący problem pomocniczy, którego rozwiązanie wyznacza minimalne ryzyko oraz charakteryzuje optymalną strategię:

$$\sup_{Q \in \boldsymbol{Q}} \varphi_Q (E^Q(H_T) - x)^+,$$

gdzie x jest kapitałem początkowym sprzedającego opcję, $\boldsymbol{Q}$ jest zbiorem miar martyngałowych, zaś φ_Q minimum pochodnej Radona-Nikodyma miary Q względem miary rynkowej.

Dla opcji amerykańskiej naturalne rozszerzenie problemu maksymalizacji polegające na zastąpieniu horyzontu czasowego przez momenty stopu nie wystarcza. Można jedynie wtedy wykazać, że rozważane maksimum jest ograniczeniem dolnym dla mnimalnego ryzyka oraz wskazać przykład, w którym minimalna strata jest większa niż poniższe maksimum

$$\sup_{\tau \in \mathcal{T}} \Big(\sup_{Q \in \boldsymbol{Q}} \varphi_{\tau,Q} (E^Q(H_\tau) - x) \Big)^+,$$

gdzie $\mathcal{T}$ jest zbiorem możliwych momentów stopu, a $\varphi_{\tau,Q}$ naturalnym uogólnieniem φ_Q.

W dwumianowym modelu rynku (*CRR model*) udowodniono, że jeśli problem maksymalizacji dla opcji europejskiej zostanie rozszerzony następująco:

$$\sup_{\chi \in \mathcal{X}} \varphi_\chi (E^{Q^*}(H_\chi) - x)^+,$$

gdzie $\mathcal{X}$ jest zbiorem możliwych zrandomizowanych momentów stopu, Q^* jest jedyną miarą martyngałową, zaś φ_χ naturalnym uogólnieniem φ_{τ,Q^*}, to w ten sposób definiowane maksimum równe jest minimalnemu ryzyku. Ponadto rozwiązanie ostatniego problemu maksymalizacji charakteryzuje optymalną strategię w podobny sposób, jak w przypadku opcji europejskiej.

Interesujące jest, że w przypadku zagadnienia wyceny pełnego zabezpieczenia na rynku bez kosztów za transakcje, ceny opcji europejskiej i amerykańskiej równe są odpowiednio $\sup_{Q \in \boldsymbol{Q}} E^Q(H_T)$ oraz $\sup_{\tau \in \mathcal{T}} \Big(\sup_{Q \in \boldsymbol{Q}} E^Q(H_\tau) \Big)$ i nie ma tu konieczności korzystania ze zrandomizowanych momentów stopu, które odgrywają ważną rolę, gdy koszty te są istotne. W przypadku minimalizacji ryzyka zwykłe momenty stopu okazują się niewystarczające nawet na rynku bez kosztów za transakcje.