dr Jan Koroński
Politechnika Krakowska
Instytut Matematyki

O problemie odwrotnym dla równania parabolicznego w $\mathbb{R}^\infty$

Problem odwrotny dla równania parabolicznego w $\mathbb{R}^\infty$ polega na wyznaczeniu pary funkcji $\big(u(x_1, x_2, \dots), f(t)\big)$ spełniających równanie

$$\Big[\sum_{i=1}^{\infty} D^2_{x_i} - D_t\Big] u(x,t) = \prod_{i=1}^{\infty} \big[f_i(x_i,t) f(t) + g_i(x_i,t)\big], \quad x = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^\infty, \tag{1}$$

w obszarze

$$D = \big\{(x,t) : x_i \in (-\infty, \infty),\ i = 1, 2, \dots,\ t \in (0,T),\ T < \infty\big\},$$

a funkcja u spełnia ponadto warunek początkowy

$$u(x,0) = \prod_{i=1}^{\infty} h_i(x_i), \qquad x_i \in (-\infty, \infty),\ i = 1, 2, \dots, \tag{2}$$

i następujący tzw. warunek kontrolny

$$u(x_0, t) = h(t), \quad x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots) \in \mathbb{R}^\infty,\ i = 1, 2, \dots. \tag{3}$$

Punkt $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots) \in \mathbb{R}^\infty$ jest dowolnym, ale ustalonym punktem. Funkcje f_i, g_i, h_i oraz h są zadane i odpowiednio regularne.

Z [1] i [2] wynika, że rozwiązanie następującego problemu początkowego Cauchy'ego dla równania parabolicznego w $\mathbb{R}^\infty$, który polega na wyznaczeniu funkcji u spełniającej równanie

$$\Big(\sum_{i=1}^{\infty} D^2_{x_i} - D_t\Big) u(x,t) = \prod_{i=1}^{\infty} \xi_i(x_i,t), \qquad x = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^\infty, \tag{4}$$

w obszarze

$$D = \big\{(x,t) : x_i \in (-\infty, \infty),\ i = 1, 2, \dots,\ t \in (0,T),\ T < \infty\big\}$$

i spełniającej warunek początkowy

$$u(x,0) = \prod_{i=1}^{\infty} h_i(x_i), \quad x_i \in (-\infty, \infty),\ i = 1, 2, \dots, \tag{5}$$

jest postaci

$$\begin{aligned} u(x,t) = \prod_{i=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_i(y_i) U_i(x_i, t; y_i, 0)\, dy_i \\ + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^\infty} \prod_{i=1}^{\infty} \xi_i(y_i, s) U_i(x_i, t; y_i, s)\, dy_i\, ds, \end{aligned} \tag{6}$$

$$x = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^\infty, \quad t \in (0,T),$$

$$U_i(x_i,t;y_i,s)=(t-s)^{-1/2}\exp\bigl(B(t,s)(x_i-y_i)^2\bigr),\quad B(t,s)=(-4(t-s))^{-1}.$$

Z (3) i (6) otrzymujemy równanie całkowe typu Volterry pierwszego rodzaju na funkcję f:

$$\prod_{i=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h_i(y_i)U_i(x_i^0,t;y_i,0)\,dy_i \\ +\int_0^t\int_{\mathbb{R}^\infty}\prod_{i=1}^{\infty}\bigl[f_i(y_i,t)f(t)+g_i(y_i,t)\bigr]U_i(x_i^0,t;y_i,s)\,dy_i\,ds=h(t).$$

Powyższe równanie sprowadzamy do równania całkowego typu Volterry drugiego rodzaju, które daje się rozwiązać w znany sposób.

Literatura

[1] J. Koroński, *Parabolic problem in the space* $\mathbb{R}^\infty$, Commentationes Mathematicae XLIV:1 (2004), 93–98.

[2] J. Koroński, *Nonhomogeneous parabolic problem in the space* $\mathbb{R}^\infty$, Fasciculi Mathematici 38 (2007), 41–45.