prof. dr hab. Stefan Paszkowski
Instytut Niskich Temperatur i Badań Strukturalnych PAN we Wrocławiu

Metoda „niewymierna" przyspieszania zbieżności pewnych szeregów potęgowych

Komunikat dotyczy klasy $\mathbb{L}_\theta(x)$ złożonej z szeregów potęgowych

$$\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j x^j, \quad \text{gdzie } \alpha_n \sim \sum_{l=0}^{\infty} c_l n^{\theta - l} \ \ (c_0 \neq 0). \tag{1}$$

Wartości zmiennej x oraz współczynniki α_j są rzeczywiste lub zespolone, a θ jest rzeczywiste. Taki szereg jest zbieżny co najmniej dla $|x| < 1$. Do $\mathbb{L}_\theta(x)$ należą m.in. (ale nie tylko) *szeregi hipergeometryczne*

$$_{p+1}F_p(a_1, \ldots, a_{p+1}; b_1, \ldots, b_p; x) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a_1)_j \ldots (a_{p+1})_j}{j!(b_1)_j \ldots (b_p)_j}\, x^j \quad (p = 0, 1, \ldots)$$

($(a)_n$ – *symbol Pochhammera*) takie, że $a_1 + \ldots + a_{p+1} - b_1 - \ldots - b_p - 1 = \theta$. W szczególności α_n może być funkcją wymierną wskaźnika n; wtedy θ jest równe różnicy stopni jej licznika i mianownika. Przykładowe współczynniki α_j innych funkcji tej klasy: $\sqrt{j+1}$ ($\theta = \frac{1}{2}$), $\log[(j+2)/(j+1)]$ ($\theta = -1$).

Szereg (1) jest wolno zbieżny dla $|x|$ bliskich 1, a jeśli $\theta > 1$, to nawet w innych przypadkach początkowe sumy częściowe s_n mogą być dalekie od jego sumy. Dlatego często jest konieczne przekształcenie ciągu $\{s_n\}$ na szybciej zbieżny ciąg $\{s'_n\}$ (i iterowanie takiego przejścia). Dla $|x| \leqslant 1$, $x \neq 1$ można stosować klasyczną *metodę Aitkena* opisaną wzorem

$$s'_n := s_{n+1} - \frac{\Delta s_n \Delta s_{n+1}}{\Delta^2 s_n} \tag{2}$$

niezależnym od θ. Jego skuteczność wynika stąd, że $\Delta s'_n = \rho_n \Delta s_n$, gdzie ρ_n jest rzędu $\mathcal{O}(n^{-3})$ dla $\theta = 0$ i $\mathcal{O}(n^{-2})$ dla $\theta \neq 0$. Dla $x = 1$ ta metoda jest bezużyteczna. Zamiast niej można stosować (dla $\theta < -1$) *metodę Drummonda* opisaną wzorem typu (2), gdzie odjemnik jest mnożony przez $\theta/(\theta+1)$.

Celem komunikatu jest opis *metody niewymiernej* wywodzącej się z metody Aitkena i skutecznej dla $x \neq 1$, a zależnej — jak metoda Drummonda — od θ. Punktem wyjścia jest przybliżone wyrażenie pewnego ilorazu z (2) przez θ, n, x: dla dowolnego β dodatniego można przyjąć, że

$$s'_n := s_{n+1} + f_n \Delta s_n, \quad \text{gdzie } f_n := \frac{x}{1 - x - \theta/(n+\beta)} = -\frac{\Delta s_{n+1}}{\Delta_n^2} + \mathcal{O}(n^{-2}).$$

Taka metoda jest liniowa i mało efektywna. Jeśli jednak, rozumując podobnie jak w metodzie Aitkena, żądamy spełnienia równości $s'_n = s'_{n+1}$, gdzie w f_n i f_{n+1} występuje to samo β, to ten parametr uzależniamy od n, co zupełnie zmienia metodę. f_n jest w niej wyróżnionym pierwiastkiem pewnego równania kwadratowego (stąd jej nazwa), a czynnik ρ_n określony jak wyżej jest dla $\theta \neq 0$ równy $\mathcal{O}(n^{-4})$. Dzięki temu metoda jest szybciej zbieżna od metody Aitkena. Jest ona skuteczna nawet w tak skrajnych przypadkach jak dla $x = -1$ i $\alpha_j = (j+1)^3$ (taki szereg (1) jest rozbieżny, ale można mu przypisać ściśle określoną sumę). Metoda jest więc użyteczna, chociaż stosunkowo kosztowna. Autor komunikatu nie zna innych metod numerycznych przyspieszania zbieżności, w których wyrażenie s'_n przez wielkości dane nie byłoby wymierne.