dr Artur Piękosz
Politechnika Krakowska

Geometria o-minimalna

Struktura to niepusty zbiór z wyróżnionymi na nim relacjami, funkcjami i elementami (stałymi). Strukturę nazywamy *o-minimalną*, jeśli jedna z jej wyróżnionych relacji jest liniowym porządkiem oraz każdy *podzbiór definiowalny* (będący wykresem formuły z parametrami odpowiedniego języka pierwszego rzędu) zbioru podkładowego struktury jest skończoną sumą przedziałów. Wtedy podzbiory definiowalne iloczynów kartezjańskich zbioru podkładowego też mają prostą budowę (można wykonać tak zwany rozkład komórkowy, stratyfikację lub triangulację takiego zbioru definiowalnego).

Pojęcie o-minimalności zostało wprowadzone przez Ananda Pillaya i Charlesa Steinhorna w latach osiemdziesiątych dwudziestego wieku, którzy bazowali na ideach Lou van den Driesa, uogólniających geometrię semialgebraiczną i subanalityczną. Zbiorami semialgebraicznymi, semianalitycznymi oraz subanalitycznymi zajmowała się w Krakowie grupa matematyków pod kierunkiem Profesora Stanisława Łojasiewicza. Podstawową monografią dotyczącą struktur o-minimalnych jest [4], natomiast dla geometrii semialgebraicznej jest to monografia [3].

Klasycznymi przykładami struktur o-minimalnych są: ciała rzeczywiście domknięte oraz uporządkowane przestrzenie wektorowe nad uporządkowanymi pierścieniami z dzieleniem. Zbiory definiowalne w pierwszym przypadku są nazywane *semialgebraicznymi*, a w drugim *semiliniowymi*. Znaleziono już wiele innych przykładów struktur o-minimalnych.

W praktyce najważniejsze są struktury o-minimalne, których zbiorem podkładowym jest zbiór liczb rzeczywistych (badanie struktur o-minimalnych nad innymi ciałami wymaga modyfikacji pojęcia topologii). Oprócz zbiorów semiliniowych i semialgebraicznych, także zbiory *globalnie subanalityczne* oraz *semialgebraiczno-eksponencjalne*, i wiele innych, są definiowalne w strukturach o-minimalnych na zbiorze liczb rzeczywistych. Teoria takich zbiorów może być wykorzystywana w: robotyce, problemach transportu, kontroli jakości w fabrykach różnego typu. Wszystkie produkty przemysłowe mogą być rozumiane jako podzbiory semialgebraiczne, ewentualnie definiowalne w jakiejś strukturze o-minimalnej, przestrzeni euklidesowej. Były też próby zastosowania teorii struktur o-minimalnych w ekonomii.

Typowym zastosowaniem geometrii semialgebraicznej jest algorytm rozwiązujący *problem przesuwacza pianina* (the piano-mover's problem) zamieszczony w [2]. Problem sprowadza się do znalezienia składowych spójnych zbioru semialgebraicznego w $\mathbb{R}^n$ i skonstruowania drogi łączącej punkty w tej samej składowej.

Monografia [1] poświęcona jest algorytmom w geometrii semialgebraicznej ciał rzeczywiście domkniętych, wraz z analizą ich złożoności. Oblicza się, między innymi, charakterystykę Eulera i liczby Bettiego zbiorów semialgebraicznych. Autor wierzy, że podobne algorytmy istnieją dla niektórych struktur o-minimalnych będących wzbogaceniami ciała rzeczywiście domkniętego (z klasą zbiorów definiowalnych rozszerzającą zbiory semialgebraiczne).

Zaprezentowane będą wyniki z prac [5], [6], dotyczące kiełków zbiorów definiowalnych.

Literatura

[1] S. Basu, R. Pollack, M.-F. Roy, *Algorithms in Real Algebraic Geometry*, Springer-Verlag 2003.

[2] R. Benedetti, J.-J. Risler, *Real algebraic and semi-algebraic sets*, Hermann 1990.

[3] J. Bochnak, M. Coste, M.-F. Roy, *Real Algebraic Geometry*, Springer-Verlag 1998.

[4] L. van den Dries, *Tame Topology and O-minimal Structures*, Cambridge University Press 1998.

[5] A. Piękosz, *On semialgebraic points of definable sets*, Singularities Symposium – Łojasiewicz 70 (Kraków 1996), Banach Center Publications 44, 189–193, 1998.

[6] A. Piękosz, *Semilinear and semialgebraic loci of o-minimal sets*, Illinois Journal of Mathematics, 45:4 (2001), 1351–1359.