Tadeusz Rzeżuchowski
Wydział MiNI Politechniki Warszawskiej

Inkluzje różniczkowe

Inkluzje różniczkowe postaci $\dot{x}(t) \in F(t, x(t))$ można traktować jako uogólnienie równań różniczkowych zwyczajnych — po prawej stronie, zamiast jednego wektora, który ma być styczny do rozwiązania, mamy cały zbiór.

Pierwsi takimi zagadnieniami zajmowali się S. K. Zaremba [20], [21] i A. Marchaud [14] w latach trzydziestych XX wieku, choć trochę inaczej je formułowali niż robi się to dzisiaj — każdy na swój sposób.

Kilka prac na ten temat napisał w latach pięćdziesiątych XX wieku A. Bielecki [4], ale prawdziwy impuls rozwoju dał teorii T. Ważewski [19] stwierdzając związek z układami sterowania $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))\ ,\ u(t) \in U$. Wykazał, że rozwiązania takiego układu pokrywają się z rozwiązaniami inkluzji $\dot{x}(t) \in F(t, x(t)) = \{f(t, x(t), u) :\ \ u \in U\}$. Ważewski pogodził podejścia Zaremby i Marchaud oraz ustalił pojęcie rozwiązania używane do dziś.

Problem istnienia rozwiązania zagadnienia początkowego

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t))\,,\ x(t_0) = x_0\,,\ t \in [t_0, T] \tag{1}$$

pobudził do rozwoju teorię multifunkcji. W zależności od tego, czy zbiory $F(t, x)$ są wypukłe, czy nie, różne rodzaje półciągłości względem zmiennej x okazały się odpowiednimi warunkami do wykazania istnienia rozwiązania [15], [1]. Jeśli chodzi o zależność od czasu t, to odpowiednia okazała się własność mierzalności.

Mierzalność multifunkcji $\Phi(t)$ jako główną konsekwencję ma istnienie selekcji mierzalnych $\varphi(t) \in \Phi(t)$. Pierwszy dowód istnienia selekcji mierzalnej podali K. Kuratowski i C. Ryll-Nardzewski [12]. Dalszy krok zrobił C. Castaing [6] dowodząc istnienia przeliczalnego zbioru selekcji gęsto wypełniających wartości multifunkcji, a jednym z najmocniejszych twierdzeń o selekcjach mierzalnych jest tak zwane tw. von Neumana, w którym nie jest wymagana domkniętość wartości multifunkcji, a jedynie mierzalność jej wykresu (dowód można znaleźć w [7]).

Najważniejszą własnością całki Aumanna multifunkcji (czyli zbioru całek wszystkich selekcji całkowalnych [3]) jest jej wypukłość i zwartość, do czego wystarcza zwartość wartości całkowanej multifunkcji — nie muszą być one wypukłe. Jest to związane z twierdzeniem Lapunowa o wypukłości zbioru wartości nieatomowej miary wektorowej.

Dla multifunkcji mierzalnych prawdziwy jest odpowiednik Tw. Łuzina o ciągłości — po usunięciu z dziedziny dowolnie małych w sensie miary zbiorów. Dalej można to rozszerzyć na przypadek multifunkcji dwóch zmiennych, mierzalnych względem jednej, a ciągłych (lub półciągłych) względem drugiej. Dostaje się w ten sposób odpowiednik Tw. Scorza-Dragoni [17], co z kolei pozwala na badanie zbioru tych $t \in [t_0, T]$, dla których rozwiązanie spełnia inkluzję niezależnie od warunku początkowego [11]. Wyniki różnią się trochę od tych, które znane są dla równań różniczkowych zwyczajnych.

Oprócz istnienia rozwiązań ważne i intensywnie badane były własności zbioru wszystkich rozwiązań (1), takie jak domkniętość, spójność, zależność od warunków początkowych, od parametrów. Szczególną rolę w tym zbiorze pełnią tak zwane rozwiązania brzegowe, to znaczy spełniające warunek $x(t) \in \partial\mathcal{A}(t, t_0, x_0)$, czyli wartości należą do brzegu zbioru wszystkich możliwych punktów, jakie mogą być osiągnięte w czasie t przez rozwiązania (1). Takie są z reguły rozwiązania optymalne w problemach sterowania. Dalej wiąże się to z położeniem pochodnej $\dot{x}(t)$ w zbiorze $F(t, x(t))$, która też na ogół znajduje się na brzegu tego zbioru, a jeszcze dokładniej o zachowaniu się pochodnej rozwiązania brzegowego mówi wariant Zasady Maksimum Pontriagina dla inkluzji różniczkowych [2].

Przy założeniu warunku Lipschitza względem x multifunkcji z (1) okazuje się, że zbiór rozwiązań jest gęsty w zbiorze rozwiązań inkluzji

$$\dot{x} \in \operatorname{clco} F(t, x)\,,\ x(t_0) = x_0 \tag{2}$$

gdzie clco oznacza domknięte uwypuklenie zbioru. To tak zwane Twierdzenie Relaksacyjne Ważewskiego-Filippova opisuje częstą i ważną sytuację, gdy zagadnienie sterowania nie ma rozwiązania optymalnego, ale można je znaleźć w zakresie rozwiązań uogólnionych (podobnie jak strategie mieszane w teorii gier).

Porównując bardzo proste inkluzje

$$\dot{x} \in \{-1, +1\}\ \ ,\quad \dot{x} \in [-1, +1]$$

Cellina [8] wykazał zaskakującą własność, że zbiór rozwiązań pierwszej nie tylko jest gęsty w zbiorze rozwiązań drugiej, ale jest też II kategorii Baire'a. Dało to początek całemu nurtowi badań [16].

Techniki mające początek w dowodach istnienie rozwiązań w przypadku niewypukłej prawej strony (1) doprowadziły do udowodnienia twierdzenia mówiącego, że zbiór pochodnych rozwiązań jest retraktem przestrzeni L^1 [5], choć nie jest to zbiór wypukły, ani nawet rozkładalny, która to własność pozwala często zastąpić wypukłość. Rozkładalność zbioru funkcji oznacza, że można na mierzalnej części dziedziny wziąć jedną z nich, na reszcie inną i tak powstała funkcja należy również do zbioru. Rodziny selekcji mierzalnych multifunkcji spełniają ten warunek.

Jednym z najważniejszych twierdzeń w dziedzinie inkluzji różniczkowych, o ile nie najważniejszym, okazało się twierdzenie Filippova:

Twierdzenie. *Załóżmy, że multifunkcja $F(t, x)$ o wartościach domkniętych w $\mathbb{R}^n$ jest mierzalna względem t oraz $d_H(F(t, x), F(t, y)) \le k(t)\|x - y\|$ gdzie d_H oznacza metrykę Hausdorffa, a $k(\cdot)$ jest funkcją całkowalną. Jeśli $y(\cdot)$ jest funkcją absolutnie ciągłą i $\|y(t_0) - x_0\| \le \alpha$, $\operatorname{dist}(\dot{y}(t), F(t, y(t)) \le p(t)$, przy czym funkcja $p(\cdot)$ jest całkowalna, to na pewnym przedziale $[t_0, T]$ istnieje rozwiązanie (1), dla którego*

$$\|x(t) - y(t)\| \le \alpha e^{\int_{t_0}^{t} k(s)\, ds} + \int_{t_0}^{t} e^{\int_s^t k(u)\, du} p(s)\, ds = \xi(t)$$

$$\|\dot{x}(t) - \dot{y}(t)\| \le k(t) \cdot \xi(t) + p(t)$$

Przykładami jego zastosowań są twierdzenia o ciągłej zależności zbioru rozwiązań od warunków początkowych i parametrów, twierdzenia dotyczące powierzchni półprzepuszczalnych, co z kolei łączy się z rozwiązaniami w sensie „viscosity" równań cząstkowych pierwszego rzędu [10].

Klasyczne już teraz inkluzje różniczkowe postaci (1) były uogólniane w różnych kierunkach. Jeden z nich [18] obejmuje inkluzje, których prawa strona zawiera miarę o wariacji skończonej, symbolicznie zapisywana jako

$$dx(t) \in F_1(t, x(t))\, dt + F_2(t, x(t))\, d\mu$$

Obejmują one szczególny przypadek pojawiania się impulsów (w postaci miar atomowych) [13], ale też układy, gdzie μ jest miarą singularną, nieatomową, a więc wpływ drugiego składnika prawej strony zaznacza się na zbiorach miary zero Lebesgue'a, choć nie ma impulsów skupionych w pojedynczych punktach.

To niewielka część dorobku związanego z inkluzjami różniczkowymi. Nie zostały wspomniane zagadnienia drożności i niezmienniczości, inkluzje stochastyczne, zagadnienia brzegowe, problemy zbieżności słabej i mocnej pochodnych ciągów rozwiązań, inkluzje różniczkowe w przestrzeniach Banacha i sporo innych. Tematyce inkluzji różniczkowych i multifunkcji poświęcone są m.in. takie monografie:

J.-P. Aubin, A. Cellina, *Differential Inclusions*, Springer-Verlag, 1984.

J.-P. Aubin, H. Frankowska, *Set-Valued Analysis*, Birkhäuser, 1990.

C. Castaing, M. Valadier, *Convex Analysis and Measurable Multifunctions*, Lect. Notes in Math. 580, Springer, 1977.

K. Deimling, *Multivalued Differential Equations*, de Gruyter, 1992.

A. F. Filippov, *Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Sides*, Kluwer, 1988.

A. Fryszkowski, *Fixed Point Theory for Decomposable Sets*, Kluwer, 2004.

M. Kisielewicz, *Differential Inclusions and Optimal Control*, Kluwer, 1991.

G. V. Smirnov, *Introduction to the Theory of Differential Inclusions*, AMS, Graduate Studies in Mathematics 41, 2002.

A. A. Tolstonogov, *Differential Inclusions in a Banach Space*, Kluwer, 2000.

Literatura

[1] H. A. Antosiewicz, A. Cellina, *Continuous selections and differential relations*, J. Diff. Eqs. 19 (1975), 386–398.

[2] А. В. Арутюнов, В. И. Благодатских, *Принцип максимума для дифференциальных включений с фазовыми ограничениями*, Труды МИАН 200 (1991), 4–26.

[3] R. J. Aumann, *Integrals of set-valued maps*, J. Math. Anal. Appl. 12 (1965), 1–12.

[4] A. Bielecki, *Extension de la méthode du rétracte de T. Ważewski aux équations au paratingent*, Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska Sect. A 9 (1955), 37–61; *Certaines propriétés topologiques des solutions des équations au paratingent*, ibid. 63–69.

[5] A. Bressan, A. Cellina, A. Fryszkowski, *A class of absolute retracts in spaces of integrable functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 112 (1991), 413–418.

[6] C. Castaing, *Sur les multi-applications mesurables*, Inf. Rech. Op. 1 (1967), 91–126.

[7] C. Castaing, M. Valadier, *Convex Analysis and Measurable Multifunctions*, Lect. Notes in Math. 580, Springer, 1977.

[8] A. Cellina, *On the differential inclusion* $x' \in [-1, +1]$, Rend. Atti Accad. Naz. Linc. Sc. Fis. Mat. Nat. Ser. VIII 69 (1980), 1–6.

[9] A. F. Filippov, *On some questions in the theory of optimal regulation*, (po rosyjsku) Vestn. Mosk. Univ. Ser. Mat. Mekh. Astr. Fiz. Khim. (1959), 25–32; tłum. ang. w SIAM J. Control, Ser. A 1 (1962), 76–84.

[10] H. Frankowska, S. Plaskacz, T. Rzeżuchowski, *Measurable viability theorems and the Hamilton--Jacobi-Bellman equation*, J. Diff. Eqs. 116 (1995), 265–305.

[11] J. Jarnik, J. Kurzweil, *Extension of a Scorza-Dragoni theorem to differential relations and functional-differential relations*, Comment. Math., tomus spec. in hon. Lad. Orlicz, PWN Warsaw (1978), 147–158.

[12] K. Kuratowski, C. Ryll-Nardzewski, *A general theorem on selectors*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Math. Astr. Phys. 13 (1965), 397–403.

[13] J. Lygeros, M. Quincampoix, T. Rzeżuchowski, *Impulse differential inclusions driven by discrete measures*, w: Hybrid Systems: Computation and Control, Lect. Notes in Comp. Sc. 4416, Springer, Berlin 2007, 385–398.

[14] A. Marchaud, *Sur les champs continus de demi-cones convexes et leurs intégrales*, Compositio Math. 3 (1936), 89–127.

[15] C. Olech, *Existence of solutions of non-convex orientor fields*, Boll. Un. Mat. It. 11 (1975), 189–197.

[16] G. Pianigiani, *Differential inclusions. The Baire category method*, w: Methods of Nonconvex Analysis, Varenna 1989, Ed. A. Cellina, Lect. Notes in Math. 1446, 104–136.

[17] T. Rzeżuchowski, *Scorza-Dragoni type theorem for upper semicontinuous multivalued functions*, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. 28 (1980), 61–66.

[18] G. Silva, R. Vinter, *Measure driven differential inclusions*, J.M.A.A. 202 (1996), 727–746.

[19] T. Ważewski, *Systèmes de commande et équations au contingent*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astr. Phys. 9 (1961), 151–155.

[20] S. K. Zaremba, *Sur une extension de la notion d'équation différentielle*, C.R.A.S. de Paris, 199 (1934).

[21] S. K. Zaremba, *Sur les équations au paratingent*, Bull. Sci. Math. 60 (1936), 139–160.