dr Hanna Ścięgosz
Politechnika Opolska
Katedra Matematyki i Zastosowań Informatyki

Wymiar korelacyjny, współczynniki Lyapunova oraz spektrum mocy dla periodycznie zaburzanych reakcji oscylacyjnych

W układach oscylacyjnych reakcji chemicznych typu Biełousowa-Żabotyńskiego [1], [2], badanych pod względem wpływu zewnętrznego periodycznego zaburzania w pobliżu bifurkacji Hopfa i węzeł-siodło (tzw. SNIPER), stwierdzono różnorodne jakościowo odpowiedzi układów, od synchronizacji poprzez oscylacje wielokrotne i obszary przejściowe do chaosu [3], [4].

Na podstawie sygnałów zmiany potencjału zarejestrowanych podczas eksperymentu przeprowadzono analizę częstościową przy użyciu pakietu STATISTICA. Wyznaczono ponadto w przypadku oscylacji chaotycznych wymiar korelacyjny oraz pełne spektrum współczynników Lyapunova stosując pakiet NDT (Nonlinear Dynamics Toolbox).

Wymiar korelacyjny, który stanowi przybliżenie wymiaru fraktalnego, wyznaczono metodą opracowaną przez Grassbergera i Procaccia [5], obliczając całki korelacyjne $C(l)$:

$$C(l) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^2} \sum_{m=1}^{N} \sum_{\substack{m'=1 \\ m'\neq m}}^{N} H\big(l - \big|Y_r(t_0+m\tau) - Y_r(t_0+m'\tau)\big|\big), \tag{1}$$

gdzie N — liczba punktów pomiarowych, l — odległość, $H(x)$ — funkcja Heaviside'a, $Y_r(t_0+m\tau) = [X(t_0+m\tau), X(t_0+(m+1)\tau), \ldots, X(t_0+(m+r-1)\tau)]$ — d-wymiarowy wektor w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^d$ z metryką euklidesową oznaczoną tu $|\cdot|$, $X(t)$ — wartość zmiennej eksperymentalnej w chwili t. Wymiar korelacyjny D_2 został wyznaczony w oparciu o wzór

$$D_2 = \lim_{l\to 0} \frac{\ln C(l)}{\ln l}\,. \tag{2}$$

Rekonstrukcję przestrzeni stanu oraz jej wymiaru d, zwanego wymiarem globalnym, przeprowadzono poprzez „zanurzenie" (embedding) szeregu czasowego z wykorzystaniem metody opóźnienia czasowego (time-delay embedding). Charakterystyczny czas opóźnienia czasowego τ znaleziono jako pierwsze miejsce zerowe funkcji autokorelacji sygnału $K(\tau)$. Dla danego opóźnienia czasowego τ oszacowano wymiar przestrzeni stanu przy użyciu metody najbliższych fałszywych sąsiadów (false nearest neighbour method).

Pełne spektrum współczynników Lyapunova oraz największy współczynnik Lyapunova $L_{\max}$ dla oscylacji quasiperiodycznych lub chaotycznych wyznaczono metodą Wolfa i współautorów [6] według wzoru

$$L_{\max} = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{N}\log_2\Big(\frac{L(t_{i+1})}{L(t_i)}\Big), \tag{3}$$

gdzie N — liczba punktów pomiarowych, $L(t_i)$ — odległość dwu wybranych punktów na atraktorze, $L(t_{i+1})$ — odległość tych punktów po upływie czasu ewolucji. Większa od zera wartość tego współczynnika potwierdza występowanie chaosu w badanym układzie dynamicznym.

Literatura

[1] R. J. Field, M. Burger, *Oscillations and Traveling Waves in Chemical Systems*, Wiley, New York 1985.

[2] H. Ścięgosz, S. Pokrzywnicki, *The Belousov-Zhabotinsky Reaction under External Periodic Influence near the SNIPER Bifurcation Point*, Acta Chemica Scandinavica 43 (1989), 926.

[3] S. Pokrzywnicki, H. Ścięgosz, *The Saddle-Node and Hopf Bifurcation Systems with the External Forcing*, The 8-th Experimental Chaos Conference, Florence 2004, s. 99.

[4] S. Pokrzywnicki, H. Ścięgosz, *Dynamics and Statistical Properties of the Hopf Bifurcation Oscillatory Systems*, Proceedings of the 16th International Conference on Systems Science, Vol. III, Wrocław 2007, s. 511.

[5] P. Grassberger, I. Procaccia, *Characterization of strange attractors*, Phys. Rev. Lett. 50 (1983), 346.

[6] A. Wolf, J. Swift, H. Swinney, J. Vastano, *Determining Lyapunov Exponents from a Time Series*, Physica 16D (1985), 285.