Ewelina Seroka
prof. dr hab. Lesław Socha
Uniwersytet Kardynała Stefana Wyszyńskiego w Warszawie
Wydział Matematyczno-Przyrodniczy
Szkoła Nauk Ścisłych

Stabilność średniokwadratowa liniowych układów hybrydowych

W poniższej pracy przedstawiony został problem stabilności średniokwadratowej liniowych układów hybrydowych. Systemy hybrydowe pojawiają się w wielu procesach fizycznych i ekonomicznych, np. w budowie maszyn, gdzie badany jest ruch masy na taśmie z uwzględnieniem tarcia, lub w matematyce finansowej, gdzie rynek może być modelowany za pomocą kilku układów o różnych własnościach stochastycznych przełączających się między sobą zgodnie z ustaloną regułą przełączania.

Problem ten można w ogólności sformułować następująco. Rozważmy stochastyczny układ hybrydowy składający się z N struktur S^l, $l = 1, 2, \ldots, N$, który w każdej strukturze opisany jest przez pewien proces $x^l(t)$, $l = 1, 2, \ldots, N$, spełniający stochastyczne równanie różniczkowe Itô

$$dx^l(t) = A^l x^l(t)\,dt + \sum_{k=1}^{M} [H_k^l x^l(t) + G_k^l]\,dB_k(t),$$
$$l = 1, 2, \ldots, N, \quad t \in [t_0, \infty) \qquad (1)$$

z warunkiem początkowym $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, $x^l(t) \in \mathbb{R}^n$, gdzie $B_k(t)$, $k = 1, \ldots, M$, są standardowymi niezależnymi procesami Wienera, zaś A^l, H_k^l są $n \times n$-wymiarowymi macierzami, $G_k^l \in \mathbb{R}^n$.

Załóżmy ponadto, że $r(t, \omega) : [t_0, \infty) \times \Omega \to \{1, 2, \ldots, N\}$ jest dyskretnym procesem stochastycznym o prawostronnie ciągłych realizacjach niezależnym od M-wymiarowego procesu Wienera $B(t) = [B_1, \ldots, B_M]^T$. Wartość procesu $r(t^*, \omega)$ wskazuje numer aktywnego podsystemu układu hybrydowego (1) w chwili t^*. Czasy przełączania t_k, $k = 0, 1, \ldots$, tworzą ciąg ściśle rosnący.

W kolejnych chwilach czasu wybierany jest proces $x(t) = x^r(t)$ spośród $x^i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, po pewnym okresie czasu następuje przełączenie układu hybrydowego (1) na kolejny proces $x^j(t)$, przy czym reguła przełączania w każdej chwili ustalona jest przez proces $r(t, \omega)$. W konsekwencji tworzy się stochastyczny układ hybrydowy złożony z procesów $x^l(t)$, $l = 1, 2, \ldots, N$, który może być opisany następująco:

$$dx(t) = A(r(t, \omega))x(t)\,dt + \sum_{k=1}^{M} [H_k(r(t, \omega)x(t) + G_k(r(t, \omega))]\,dB_k(t),$$
$$l = 1, 2, \ldots, N, \quad t \in [t_0, \infty). \qquad (2)$$

Realizacje układu hybrydowego (2) są złożone z przedziałami ciągłych prawie wszędzie realizacji procesów markowskich o różnych parametrach.

W pracy przeanalizowane zostały liniowe układy hybrydowe ze stałymi współczynnikami z dwoma typami wymuszeń: z szumem addytywnym

$$dx(t) = A(r(t,\omega))x(t)\,dt + \sum_{k=1}^{M} H_k(r(t,\omega))\,dB_k(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, \infty) \tag{3}$$

oraz z szumem multiplikatywnym

$$dx(t) = A(r(t,\omega))x(t)\,dt + \sum_{k=1}^{M} H_k(r(t,\omega))x(t)\,dB_k(t),$$
$$x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, \infty), \tag{4}$$

gdzie $A, H_k : \mathbb{S} \to \mathbb{M}^{n\times n}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $B_1, \ldots, B_M$ są niezależnymi standardowymi procesami Wienera, zaś przełączanie zadane jest przez proces

$$r(t,\omega) = l \quad \text{z prawdopodobieństwem } p^l(t), \qquad l = 1, 2, \ldots, N. \tag{5}$$

Głównym rezultatem pracy było znalezienie warunków wystarczających stabilności średniokwadratowej dla przeanalizowanych układów hybrydowych.