mgr Urszula Skwara
Uniwersytet Śląski
Instytut Matematyki

Stochastyczne równanie symbiozy

Rozważamy układ równań stochastycznych

$$
\begin{aligned}
dX(t) &= (a_1 + b_1Y(t) - c_1X(t))X(t)\,dt + \rho_1X(t)\,dW(t)) \\
dY(t) &= (a_2 + b_2X(t) - c_2Y(t))Y(t)\,dt + \rho_2Y(t)\,dW(t),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

gdzie $a_i, b_i, c_i, \rho_i > 0$ $(i = 1, 2)$, $W(t)$ jest procesem Wienera o wartościach rzeczywistych, $X(t), Y(t)$ oznaczają rzeczywiste procesy stochastyczne reprezentujące populacje poszczególnych gatunków. Układ (1) jest stochastyczną wersją klasycznego modelu symbiozy

$$
\begin{aligned}
x' &= (a_1 + b_1y - c_1x)x \\
y' &= (a_2 + b_2x - c_2y)y,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

gdzie $x(t)$, $y(t)$ oznaczają wielkości poszczególnych gatunków w chwili t. Układ (1) opisuje zależności dwóch gatunków żyjących w symbiozie uwzględniając wpływ otoczenia na oba gatunki. Najpierw dowodzimy istnienia, jednoznaczności oraz dodatniości rozwiązań układu (1). Głównym celem jest zbadanie asymptotycznych własności rozwiązań układu (1). Najpierw pokazujemy, że dla każdego $t > 0$ zmienna losowa $(X(t), Y(t))$ ma gęstość $U(t, x, y)$. Podajemy również warunek wystarczający dla asymptotycznej stabilności układu (1), tzn. zbieżność gęstości $U(t, x, y)$ do stacjonarnej gęstości $U_\star(t, x, y)$. W przypadku, gdy układ nie jest asymptotycznie stabilny, dowodzimy, że $\lim_{t\to\infty} X(t) = 0$ p.n. Pokazujemy także, że w tym przypadku $\lim_{t\to\infty} Y(t) = 0$ p.n lub rozkład procesu $Y(t)$ jest zbieżny słabo do pewnej miary probablistycznej. Najtrudniejszą cześcią jest pokazanie asymptotycznej stabilności układu (1), gdyż równanie Fokkera-Plancka odpowiadające układowi (1) jest zdegenerowanego typu. Ponadto porównujemy własności układów (1) i (2) oraz podajemy interpretację biologiczną uzyskanych wyników.