

Różniczkowanie funkcji o wartościach w przestrzeni dystrybucji

Niech B będzie przestrzenią Banacha nad ciałem \mathbb{K} , S przestrzenią lokalnie wypukłą. Niech $\text{sn } S$ oznacza rodzinę ciągłych semi-norm w S . W szczególności będziemy rozważać podprzestrzeń funkcji próbnych $S = \mathcal{D}_K(\Omega)$, gdzie

$$\mathcal{D}_K(\Omega) = \{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \{\varphi \neq 0\} \subset K\},$$

$K \subset \Omega$ jest zbiorem zwartym, $\Omega \in \text{top } \mathbb{R}^n$, z rodziną semi-norm

$$q_m(\varphi) = \sup_{x \in \Omega, |\alpha| \leq m} |D^\alpha \varphi(x)|,$$

gdzie $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ oraz $S = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, gdzie

$$\{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}) : P \cdot D^\alpha \varphi \text{ jest ograniczona dla każdego wielomianu} \\ P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ oraz } \alpha \in \mathbb{N}^n\},$$

czyli przestrzeń Schwartza, z rodziną semi-norm

$$q_m(\varphi) = \sup_{x \in \Omega, |\alpha| \leq m} (1 + |x|^2)^m |D^\alpha \varphi(x)|.$$

Z każdą semi-normą $p \in \text{sn } S$ możemy związać przestrzeń Banacha $\mathcal{L}((S, p), B)$ odwzorowań \mathbb{K} -liniowych, p -ciągłych prowadzących z S w B . Niech $\mathcal{L}(S, B)$ oznacza przestrzeń odwzorowań \mathbb{K} -liniowych ciągłych $S \rightarrow B$. W przestrzeni tej będziemy rozważać topologię induktywną, czyli taką, przy której iniekcje kanoniczne $\mathcal{L}((S, p), B) \hookrightarrow \mathcal{L}(S, B)$ są ciągłe dla każdego $p \in \text{sn } S$.

W referacie zbadamy ciągłość i różniczkowalność odwzorowań postaci

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto T(x) \in \mathcal{L}(S, B),$$

a w konsekwencji odwzorowań o wartościach w przestrzeni dystrybucji i przestrzeni dystrybucji temperowanych

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto T(x) \in \mathcal{D}'(\Omega, B), \quad \mathbb{R} \ni x \mapsto T(x) \in \mathcal{D}'_{\text{temp}}(\mathbb{R}^n, B).$$

Okazuje się, że tego typu odwzorowania mogą mieć zastosowanie w pewnego typu problemach inżynierskich. Przykład takiego zastosowania przedstawimy w referacie.