dr inż. Zenon Zbąszyniak
Politechnika Poznańska
Instytut Matematyki

Pewne zagadnienia gładkości w przestrzeniach Orlicza i Musielaka-Orlicza

W pracy zostały omówione i porównane kryteria gładkości ciągowej przestrzeni Orlicza i Musielaka-Orlicza wyposażonych w normę Orlicza.

Niech X^* oznacza przestrzeń sprzężoną do przestrzeni X, a $S(X)$ sferę jednostkową w X.

Definicje. Funkcjonał $F \in S(X^*)$ nazywamy *funkcjonałem podparcia* w punkcie $x \in S(X)$, gdy $f(x) = \|x\| = 1$.

Punkt $X \in S(X)$ nazywamy *punktem gładkości* przestrzeni X, gdy istnieje dokładnie jeden funkcjonał podparcia w tym punkcie.

Przestrzeń X nazywamy *gładką*, gdy wszystkie jej punkty różne od zera są punktami gładkości.

Funkcję $\Phi : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ nazywamy *funkcją Orlicza*, gdy przyjmuje wartość zero tylko w zerze, jest ciągła w zerze, lewostronnie ciągła na całym zbiorze $\mathbb{R}_+$, wypukła i parzysta na $\mathbb{R}$, oraz nie jest identycznie równa zeru.

Funkcję Musielaka-Orlicza (ciągową) określamy jako ciąg $(\Phi_i)_{i=1}^{\infty}$ funkcji Orlicza Φ_i.

Na przestrzeni l^0 wszystkich ciągów rzeczywistych definiujemy wypukły funkcjonał I_Φ wzorem $I_\Phi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi(x_i)$ $\left[I_\Phi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(x_i)\right]$ dla każdego $x = (x_i) \in l^0$.

Przestrzeń Orlicza [*Musielaka-Orlicza*] określamy przy użyciu odpowiedniego funkcjonału I_Φ następująco:

$$l_0^\Phi = \left\{x \in l^0 : I_\Phi(\lambda x) < \infty \text{ dla pewnego } \lambda > 0\right\}.$$

Przy wyposażeniu tej przestrzeni w normę Orlicza daną wzorem Amemiyi

$$\|x\|_\Phi^0 = \inf_{k>0} \frac{1}{k} \left\{1 + I_\Phi(kx)\right\}$$

jest ona przestrzenią Banacha.

W twierdzeniach pokazano warunki określające gładkość całej przestrzeni. Uwypuklono rolę pewnej interesującej z punktu widzenia interpretacji geometrycznej funkcji Π_Φ. Pozwoliło to na pełniejsze porównanie kryteriów w obu przestrzeniach.