Katarzyna Brzozowska-Rup
Politechnika Świętokrzyska
Antoni Leon Dawidowicz
Uniwersytet Jagielloński

Wybrane metody estymacji nieliniowych modeli przestrzeni stanów. Zastosowanie algorytmu filtru cząsteczkowego

W referacie rozważamy model stochastyczny definiowany układem

$$x_t \sim f_\theta(x_t|x_{t-1}),$$
$$y_t \sim g_\theta(y_t|x_t),$$

gdzie f_θ i g_θ są funkcjami gęstości rozkładów niekoniecznie gaussowskich. Proces stochastyczny $\{X_t\}_{t\in\mathbb{N}}$ jest procesem zmiennych ukrytych, a proces $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{N}}$ procesem obserwacji.

W praktyce bardzo często pojawia się konieczność sekwencyjnej estymacji modelu. W takich przypadkach powszechnie stosowana metoda MCMC okazuje się nieefektywna ze względu na konicznosć powtarzania całej procedury w momencie pojawienia się nowej informacji o modelu. W związku z tym, iż sekwencyjne metody Monte Carlo (ang. *Sequential Monte Carlo* SMC), znane również pod nazwą algorytmu filtru cząsteczkowego (ang. *Particle Filters* PF), umożliwiają efektywne szacowanie stanów układu, naturalne jest poszukiwanie metod estymacji parametrów opartych na tym algorytmie. Celem referatu jest porównanie dwóch technik estymacji statycznych parametrów modelu przestrzeni stanów opartych na algorytmie filtru cząsteczkowego. Ze względu na dobrze znane własności teoretyczne jedną z prezentowanych metod estymacji jest metoda największej wiarogodności, drugi sposób oparty jest na podejściu bayesowskim. W przypadku rozkładów wysokowymiarowych problem jednoczesnej estymacji stanów oraz parametrów modelu związany jest z nieistnieniem analitycznej postaci funkcji wiarogodności. W tym przypadku proponujemy aproksymację wykorzystującą algorytm EM połączony z odpowiednio zmodyfikowaną metodą PF. Estymacja parametrów modelu we wnioskowaniu bayesowskim polega na rozszerzeniu wektora stanu o wektor parametrów oraz estymacji rozkładu $p(x_{0:t}, \theta|y_{1:t})$ lub $p(x_t, \theta|y_{1:t})$. Niestety w praktyce bezpośrednie zastosowanie algorytmu PF skutkuje tym, iż rozkład a posteriori szacowany jest zdegenerowanym rozkładem empirycznym (metoda jest nieefektywna). Jednym z proponowanych sposobów wyeliminowania degeneracji próbki jest zastosowanie metody polegającej na aproksymacji rozkładu za pomocą jądra (ang. *regularized particle filters*) [3]. Wówczas proponowany estymator funkcji gęstości łącznego rozkładu a priori (wektora stanu i parametrów) jest postaci

$$p_N^R(x_t, \theta|y_{1:t}) = \sum_{i=1}^{N} w_t^{(i)} \delta_{x_t^{(i)}}(x_t) K_h(\theta_t - (a\theta_t^{(i)} + (1-a)\bar{\theta}_t)),$$

gdzie $K_h(y) = h^{-d}K(\frac{y}{h})$ jest jądrem regularyzacji, czynnik α (ang. *shrinkage factor*) jest liczbą z przedziału $[0, 1]$, $\bar{\theta}_t$ jest empiryczną wartością oczekiwaną liczoną na podstawie zbioru cząsteczek w chwili t, a δ oznacza deltę Diraca.

Bibliografia

[1] C. Andrieu, A. Doucet, V. B. Tadić, *On-line simulation-based algorithms for parameter estimation in general state-space models*, Proc. Conf. Dec. Control. Institute of Electrical and Electronics Engineers, New York, 2005.

[2] C. Andrieu, A. Doucet, *On-line expectation-maximization type algorithms for parameter estimation in general state-space models*, Proc. IEEE ICASSP, 2003.

[3] R. Casarin, J. M. Marin, *Online data processing: Compersion of Bayesian regularized particle filters*, Electronic Journal of Statistics 3 (2009), 239–258.

[4] J. Olsson, T. Rydén, *Asymptotic properties of particle filter-based maximum likelihood estimators for state-space models*, Stochastic Process and their Applications 118 (2008), 649–680.

[5] G. Poyiadjis, A. Doucet, S. S. Singh, *Maximum likelihood parameter estimation in general state-space models using particle methods*, Unpublished manuscript, Department of Engineering, Cambridge University, 2005.