dr inż. Wiesław Grygierzec
Uniwersytet Rolniczy w Krakowie
Katedra Statystyki Matematycznej

Równanie Bellmana dla sterowania optymalnego stochastycznego równania dyfuzji

Przedmiotem referatu jest nieskończeniewymiarowe równanie Hamiltona-Jacobiego-Bellmana drugiego rzędu

$$\begin{cases} u_t(t,x) + \frac{1}{2}\operatorname{Tr} QD^2u(t,x) + \langle Ax, Du(t,x)\rangle + \mathcal{H}(t,x,Du(t,x)) = 0 \\ u(T,x) = g(x) \qquad \text{dla } (t,x) \in (0,T) \times \mathbf{H} \end{cases} \tag{1}$$

i jego związek z problemem sterowania optymalnego stochastycznego równania dyfuzji. W powyższym równaniu $\mathbf{H}$ jest ośrodkową przestrzenią Hilberta, $-A : D(A) \subset \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ domkniętym, dodatnio określonym, samosprzężonym operatorem generującym C_0 półgrupę.

Weźmy następujący problem sterowania optymalnego. Niech $D = \mathbb{R}^d / L(\mathbb{Z}^d)$ będzie torusem d-wymiarowym, $d \leq 3$ (można też rozważać $D \subset \mathbb{R}^d$ obszar) oraz niech będzie dane następujące stochastyczne równanie dyfuzji ze sterowaniem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial s}(t,\xi) = \Delta_\xi(t,\xi) + (a(t,\xi)\cdot\nabla_\xi)x(t,\xi) + \dot{W}_Q(t,\xi) \\ x(0,\xi) = x_0, \qquad \text{gdzie } (t,\xi) \in [0,T] \times D, \end{cases} \tag{2}$$

gdzie W_Q jest procesem Wienera o kowariancji Q, natomiast $a : \Omega \times [0,T] \to U$ jest procesem stochastycznym adaptowanym do procesu Wienera, o wartościach w pewnej przestrzeni metrycznej U. Powyższe równanie opisuje proces dyfuzji w sterowanym polu unoszenia. Podkreślmy w tym miejscu, że sterowanie współczynnikiem $a(t,\xi)$, który stoi przy gradiencie funkcji poszukiwanej $\nabla x(t,\xi)$, powoduje istotne trudności w badanym zagadnieniu i decyduje o jego oryginalności.

Dla dalszych celów zapiszmy równanie (2) w abstrakcyjnej formie. W tym celu oznaczmy przez $V \subset \mathbf{H} \subset V'$ standardową trójkę Gelfanda oraz niech

$$P : L^2(D) \to H$$

będzie projekcją ortogonalną. Zdefiniujmy

$$Ax = -P\Delta x \quad \text{oraz} \quad B(a,x) = P[(a\cdot\nabla)x].$$

Niech dana będzie przestrzeń probabilistyczna z filtracją $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq t_0}\}, \mathbf{P})$, na której jest zdefiniowany proces Wienera $W(t)$ o wartościach w $\mathbf{H}$ i kowariancji Q. Rozważamy rodzinę problemów sterowania odpowiadającą (2)

$$\begin{cases} dX(s) = [-AX(s) - B(a(s), X(s))]\, ds + dW(s) \qquad \text{w } (t,T] \times H \\ X(t) = x \in H \end{cases} \tag{3}$$

Dla ustalonej chwili początkowej t oznaczmy przez $\mathcal{U}_t$ zbiór sterowań dopuszczalnych. Sterowanie optymalne polega na minimalizacji po wszystkich $a(\cdot) \in \mathcal{U}_t$ funkcjonału kosztu

$$J(t,x,a(\cdot)) = \mathbb{E}\bigg\{ \int_t^T l(s,X(s),a(s)) + g(X(T)) \bigg\}.$$

W metodzie programowania dynamicznego oczekuje się, że funkcja wartości

$$\mathcal{V}(t,x) = \inf_{a(\cdot)\in\mathcal{U}_t} J(t,x,a(\cdot)) \tag{4}$$

jest rozwiązaniem równania Hamiltona-Bellmana-Jacobiego (1) z odpowiednio zdefiniowanym hamiltonianem

$$\mathcal{H}(t,x,p) = \inf_{a\in U} \left\{ \langle B(a,x),p\rangle + l(t,x,a) \right\}. \tag{5}$$

Ponieważ jednak funkcja wartości $\mathcal{V}(t,x)$ na ogół nie jest klasy $C^{1,2}$, a zatem nie może w sposób klasyczny spełniać równania (1), poszukuje się ogólniejszych rozwiązań lepkościowych. W przedstawianym referacie interesuje nas, czy równanie (1) posiada jednoznaczne lepkościowe rozwiązanie, a jeżeli tak, to czy funkcja wartości spełnia je w sensie lepkościowym.